EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

juni 11

nr 7

jaargang 86

Op weg naar IMO2011

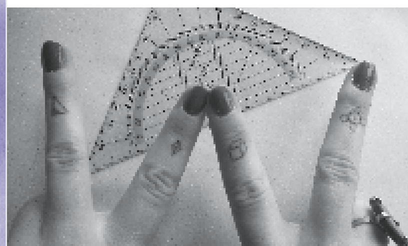
Meervoudige intelligentie

Tangram tekenen

Lesmap voor het vmbo

Jaarvergadering/ Studiedag 2011

Wiskunde met de vingers





Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

COLOFON

juni 11

nr 7

jaargang 86

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394



Inzendingen bijdragen

Artikelen en mededelingen naar de hoofdredacteur: Klaske Blom, Westerdoksdijk 39, 1013 AD Amsterdam
E-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren; op papier in drievoud. Illustraties, foto's en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen: www.nvvw.nl/euclricht.html

Realisatie

Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices
De Kleuver bedrijfscommunicatie b.v.
Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Website: www.nvvw.nl

Voorzitter

Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
Tel. (070) 390 70 04
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris

Kees Lagerwaard,
Eindhovensingel 15, 6844 CA Arnhem
Tel. (026) 381 36 46
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie

Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
Tel. (0321) 31 25 43
E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie

NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Postbus 405, 4100 AK Culemborg
Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap

Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt voor
- leden: € 70,00
- leden, maar dan zonder Euclides: € 40,00
- studentleden: € 35,00
- gepensioneerden: € 40,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 40,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Personen (niet-leden van de NVVW): € 65,00
Instituten en scholen: € 145,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 18,00
Betaling per acceptgiro.

Kort vooraf

[Klaske Blom]

Zomer

We hebben het weer gehaald, de eindstreep. De diploma's zijn uitgedeeld, de PTA's voor volgend jaar liggen klaar en we kunnen beginnen aan onze vakantie. Vorig jaar schreef ik: 'Als u maar geniet van de *lengte* van uw vakantie, want heel lang zal het vast niet meer duren voordat die ingekort wordt.' Op 23 mei j.l. is er wellicht gestaakt (ik schrijf dit Kort Vooraf op 22 mei) o.a. tegen de inkorting van onze lange zomervakantie. Op het moment dat u dit leest, weten we hoe het afgelopen is. Mocht de CAO getekend zijn, dan gaat u nu uw laatste 'lange' vakantie in. Geniet er van!
En, vergeet niet *Euclides* in uw vakantiekoffer te doen; we hebben geprobeerd er weer een mooi nummer van te maken.

In uw luie tuin-, camping-, strand- of wat-dies-meer-zij-stoel

Mocht u nog moeten afkikken van uw werk en de overgang naar vakantie maar moeizaam kunnen maken, dan raad ik u aan om achterin te beginnen en eerst de uitnodiging voor de studiedag van de vereniging in november, te lezen. Schrijf de datum vast in uw agenda, dan heeft u iets om naar uit te zien in die lege zomerweken. Verder leest u in een artikel van Johan Gademan, ook op de Verenigingspagina's, o.a. hoe u een twitter-account kunt aanmaken waarmee u de NVvW kunt volgen, ook in vakantietijd!
Dan wil ik daarna graag uw aandacht vragen voor een paar zeer concreet bruikbare artikelen: Joeri van Ast en Harrie Broekman hebben lesmateriaal ontwikkeld aan de hand van het Tangram-spel. Ze beschrijven waarom het zo belangrijk is voor een leerling om de goede vragen te leren stellen. Ook onmiddellijk bruikbaar zijn de ideeën van Ingrid Berwald; ze behoeft volgens mij met haar vierde deel in serie inmiddels geen aankondiging meer, kijk snel. Verrassend anders dan we gewend zijn, is de insteek van Harrie Jorna: hij heeft lesmateriaal voor de wiskundeles ontwikkeld vanuit de visie van *Nieuwe Scheikunde* waarin vooral zelf experimenteren leidt tot inzicht in wiskunde. Hij durft zelfs te beweren dat er daardoor ook veel minder dan gebruikelijk in wiskundelessen geoefend hoeft te worden met dezelfde soort opgaven.
Er waren een paar heuglijke feiten: *Pythagoras* werd 50 jaar en Heiner Wind was op zijn feestje. Het Wereldwiskunde Fonds kon weer een onderwijsproject in India steunen. En het lespakket 'Verder met rekenen' voor leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg met lwoo is klaar. Een welkome ondersteuning voor leerlingen en docenten; kijk snel waar het te vinden is.
In onze langlopende series vinden we weer een IMO-vervolg en een bijdrage van Frans Ballering. Uiteraard hebben onze vaste rubrieksauteurs Dorien Lugt, Ton Lecluse en Harm Jan Smid weer moois voor u in petto. Onze vierde vaste rubrieksauteur, Frits Göbel, neemt met zijn puzzel 'Verdeling in vierkanten' in dit nummer afscheid van u. Het is zijn laatste puzzel. Op de recreatie-pagina's leest u hier meer over. Frits heeft negen jaar lang, in elk nummer van *Euclides*, een puzzel gepubliceerd en werd door 'zijn' puzzelaars zeer gewaardeerd om zijn creatieve en interessante vondsten. Wij zijn hem zeer erkentelijk voor het puzzelwerk dat hij voor *Euclides* verricht heeft en voor menig uurtje dat hij ons liet tobben. Als laatste wil ik nog de 'lekkere' wiskundige artikelen van Dick Klingens en Jan Kroesen noemen, waarin u aan de slag kunt met dobbelstenen, Markov-ketens en de rij van Fibonacci. Volgens mij kunt u een zomerlang vooruit!

Afscheid en vernieuwing

Na vele jaren lidmaatschap van de redactie hebben Bram van Asch en Hans Daale afscheid genomen als resp. boekredacteur en redacteur hbo/mbo. Bestuur en redactie hebben tijdens een afscheids-etentje beiden hun erkentelijkheid betoond vanwege de vele jaren dat zij zich vrijwillig voor *Euclides* hebben ingezet. Bram wordt opgevolgd door Ernst Lambeck die ik veel succes wens en u – met hem – veel interessante boekbesprekingen. Een opvolger voor Hans Daale is nog niet gevonden. Mocht u interesse hebben, dan zien we uw reactie graag tegemoet.
En ook ik vertrek uit de redactie van *Euclides*. Drie jaar ben ik met bijzonder veel plezier hoofd-redacteur geweest. Alle auteurs die in de afgelopen jaren hun bijdragen hebben ingestuurd, wil ik hiervoor hartelijk danken; de contacten die – meestal elektronisch – ontstonden naar aanleiding van ingezonden artikelen, heb ik als bijzonder leerzaam en inspirerend ervaren. Ook wil ik graag mijn dank uitspreken aan alle redactieleden die op de achtergrond bijzonder veel werk verzetten om *Euclides* mogelijk te maken. Het was een groot goed om met deskundige mensen, in vertrouwen en plezierige samenwerking, op te kunnen trekken. Mijn opvolgster, Marjanne de Nijs, die al enige jaren deel uitmaakt van de redactie, wens ik veel succes! *Euclides* zal onder haar leiding een mooie toekomst tegemoet gaan, en hopelijk de 90e, misschien zelfs de 100e jaargang halen.

Inhoud

Op weg naar IMO2011



EEN SCHOOLJAAR LANG TRAINEN

[Maarten Roelofsma]

Van 13 t/m 24 juli 2011 vindt voor het eerst in de geschiedenis in Nederland de Internationale Wiskunde Olympiade (International Mathematical Olympiad, IMO) plaats. Zo'n 600 leerlingen uit meer dan 100 landen zullen dan twee dagen lang in Amsterdam hun tanden zitten in een zestal zeer pittige wiskundeopgaven. Opgaven waaraan ook beroepswiskundigen vaak nog een flinke kluif hebben. Hoe zien die opgaven er eigenlijk uit? En wat trekt de deelnemers hierin zo aan? Om dat te ontdekken trof u in Euclides elke keer een IMO-opgave uit het verleden aan, besproken door een leerling die indertijd in het Nederlandse team zat.
Dit keer een artikel over wat er aan deelname vooraf gaat.

In 2008 en 2009 ben ik als deelnemer mee geweest naar de IMO in Madrid en Bremen. Inmiddels ben ik tweedejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. Sinds dit jaar ben ik betrokken bij het selectieproces en trainingsprogramma van de wiskunde-olympiade. Hieronder licht ik de opbouw van het trainingsjaar toe en sluit af met een van de opgaven uit de laatste selectietoets voor IMO2011.

Om uitgenodigd te worden voor de training moeten leerlingen zich door drie selectie-ronden knokken. De eerste ronde wordt op de scholen zelf gehouden waarna de besten door mogen naar de tweede ronde die op verschillende universiteiten plaatsvindt. Aan de finaleronde in Eindhoven doen de overgebleven 130 van circa 5000 leerlingen mee. Vanaf dit moment ben ik actief bij de olympiade betrokken met als eerste belangrijke taak het nakijken van de finaleronde. Het is leuk om met de andere nakijkers, voornamelijk oud-deelnemers, verrassend goede resultaten te zien van jonge, getalenteerde leerlingen. Uiteindelijk blijven er 25 deelnemers over die aan het intensieve trainingsprogramma gaan deelnemen.
Als trainer heb ik drie taken in het trainingsprogramma. Deze taken bestaan uit het nakijken van selectietoetsen, het wekelijks begeleiden van enkele deelnemers en het voorbereiden van trainingsbijeenkomsten. Het wekelijks begeleiden betekent dat ik feedback geef op ingestuurde uitwerkingen en aanwijzingen geef bij het schrijven van een uitwerking. Maandelijks zijn er trainingsbijeenkomsten; dit kan een dag zijn of een heel weekend. Hiervoor heb ik enkele sessies voorbereid waarin ik uitleg geef over een specifiek onderwerp en de deelnemers help met het maken van opgaven. Daarnaast is een belangrijk onderdeel van de dagen elkaar beter te leren kennen en is er ruimte voor gezelligheid en ontspanning.
In maart hebben de deelnemers een eerste selectietoets gemaakt. De beste deelnemers blijven in de race voor de IMO in Amsterdam. Deze groep mag als extra ook deelnemen aan de Benelux-Olympiade. De overige deelnemers blijven in training met het oog op de IMO in 2012 in Argentinië. Vorige maand was de afsluitingsweek van het trainingsjaar in voorbereiding op IMO2011. De deelnemers die nog in de race waren voor deelname aan de IMO in Amsterdam, kregen twee afsluitende selectietoetsen. Uit die groep werd het IMO-team bestaande uit zes deelnemers en een reserve-deelnemer samengesteld. Deze laatste deelnemer heeft de aanmoedigingsprijs ontvangen als veelbelovend talent voor IMO2012.
Om een indruk te geven van de selectietoetsen werk ik de volgende opgave uit.

De opgave

Bepaal alle gehele getallen n waarvoor het polynoom $P(x) = 3x^3 - nx - n - 2$ te schrijven is als het product van twee niet-constante polynomen met gehele coëfficiënten.

Uitwerking

Bij opgaven waar je iets voor algemene n moet nagaan, helpt het op weg naar een oplossing om kleine gevallen te proberen. Zo krijgen we ideeën voor de oplossing met algemene n. We kijken hiervoor eerst naar het geval $n = 0$.

Voor $n = 0$ hebben we het polynoom $P(x) = 3x^3 - 2$. Hoe bepalen we nu of we kunnen factoriseren? Er geldt dat een factorisatie van de volgende vorm moet zijn:
$P(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$
waarbij a en c ongelijk aan 0 zijn. Door haakjes weg te werken en dit vervolgens gelijk te stellen aan $3x^3 - 2$ vinden we onder meer de vergelijkingen $ac = 3$ en $be = -2$. Met veel rekenwerk kunnen we dit wellicht oplossen, maar we gaan het eerst op een andere manier proberen (bovendien gaat het rekenwerk zeker niet lukken voor algemene n). Toch kunnen we een aantal van deze vergelijkingen goed gebruiken voor algemene n (bijvoorbeeld $ac = 3$ geldt voor algemene n).
Tot nu toe hebben we nog geen gebruik gemaakt van het feit dat we voor x waarden kunnen invullen. Omdat nulpunten een centrale rol bij polynomen spelen, is het logisch om hier als eerste naar te kijken.
De nulpunten van de factorisatie $P(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$ kennen we expliciet. De meest eenvoudige is $x = -\frac{b}{a}$.
Deze waarde vullen we in bij het geval $n = 0$; we hebben dan:
$0 = P(-\frac{b}{a}) = 3(-\frac{b}{a})^3 - 2$
Dat betekent dat $-\frac{b}{a} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Nu hebben we links een rationaal getal en rechts een niet-rationaal getal. Hieruit blijkt dat we bij $n = 0$ geen gehele getallen a en b kunnen vinden voor een factorisatie.
We hebben bij het proberen van het geval $n = 0$ al conclusies getrokken die ook gelden voor algemene n. We proberen nu voor algemene n iets soortgelijks te doen. We beginnen direct met het invullen van het nulpunt $x = -\frac{b}{a}$; dat leidde bij $n = 0$ immers tot de oplossing. We krijgen nu:
$0 = P(-\frac{b}{a}) = 3(-\frac{b}{a})^3 - n\cdot(-\frac{b}{a}) - n - 2$
Hieruit halen we vervolgens de factor n en we krijgen dan:
$3(-\frac{b}{a})^3 - 2 = n(1 - \frac{b}{a})$
Als $a = b$ is dit voor geen enkele waarde van n waar. We kunnen dus zonder probleem delen door de factor $(1 - \frac{b}{a})$. Het resultaat is een uitdrukking voor n in a en b:

$$n = \frac{3(-\frac{b}{a})^3 - 2}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{3(\frac{b}{a})^3 + 2}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{3b^3 + 2a^3}{ba^2 - a^3}$$

Met dit resultaat hebben we het probleem van het vinden van alle n vertaald naar het vinden van de mogelijke waarden voor a en b. Voor a hadden we al de volgende voorwaarde gevonden: $ac = 3$. Dat betekent dus dat $a = \pm1, \pm3$.
Over b weten we nog weinig. Merk op dat we niet, zoals in het geval $n = 0$, kunnen afleiden dat $be = -2$. We moeten hiervoor dus iets anders bedenken.
Het bekijken van de nulpunten van $cx^2 + dx + 3$ lijkt geen goed idee: de nulpunten bevatten immers wortels of hoeven zelfs helemaal niet te bestaan. We proberen dus iets anders dan een nulpunt in te vullen. We willen echter wel dat dit onafhankelijk is van n. Invullen van $x = -1$voldoet hier precies aan: we vinden dat $P(-1) = -5$ voor alle n. We vullen in de factorisatie $x = -1$ in; we krijgen dan:
$(-a + b)(c - d + e) = -5$
Daaruit volgt dat $b - a$ een deler is van -5; dus $b - a = \pm1, \pm5$. Voor elke mogelijke a houden we dus 4 mogelijkheden voor b over.
In principe kunnen we al deze mogelijke combinaties afzonderlijk uitrekenen. Het is echter verstandig om eerst na te gaan of je niet een aantal gevallen eenvoudig kan wegstrepen. We zien bijvoorbeeld dat als we een factorisatie van $P(x)$ hebben, we beide termen met -1 kunnen vermenigvuldigen. We hebben dan nog steeds een factorisatie, namelijk $P(x)= (-ax - b)(-cx^2 - dx - e)$. Het is dus voldoende alleen de mogelijkheden $a = 1$ en $a = 3$ te bekijken. We houden acht mogelijkheden over.
Het is mogelijk om deze acht mogelijkheden afzonderlijk uit te werken; het aantal mogelijkheden is immers te overzien. Er is echter een mooie manier om dit aantal tot vier terug te brengen. Merk hiervoor op dat we bij een factorisatie van $P(x)$ de getallen a en b relatief priem kunnen kiezen. De grootste gemene deler van a en b kunnen we immers in de factor $cx^2 + dx + e$ stoppen.
We bekijken nu de uitdrukking voor n en zien dat $ba^2 - a^3$ een deler is van $3b^3 + 2a^3$. Dus in het bijzonder is a^2 een deler van $3b^3 + 2a^3$. Dit betekent dat a^2 een deler is van $3b^3$. Gebruiken we nu dat we a en b relatief priem kunnen kiezen, dan vinden we dat a^2 een deler is van 3. Dit betekent dat $a = 1$.
We hebben de opgave beperkt tot vier mogelijkheden. Deze blijken ook allemaal een factorisatie op te leveren. Het geval $a = 1$, $b - a = 5$ werken we expliciet uit.
Er geldt dan dat $b = 6$ waaruit volgt dat $n = 130$. We delen nu de factor $x + 6$ uit het polynoom $P(x) = 3x^3 - 130x - 132$; dit doen we door een staartdeling. We krijgen dan:

$$\begin{aligned}P(x) &= 3x^2(x+6) - 18x^2 - 130x - 132\\ &= 3x^2(x+6) - 18x(x+6) - 22x - 132\\ &= 3x^2(x+6) - 18x(x+6) - 22(x+6)\\ &= (x+6)(3x^2 - 18x - 22)\end{aligned}$$

We zien dat er voor $n = 130$ een factorisatie mogelijk is. Op dezelfde wijze vinden we dat de drie overige gevallen, $n = -2, 26, 38$, ook een factorisatie opleveren.
We concluderen dat het polynoom te factoriseren is voor $n = -2, 26, 38$ en 130.

Tot slot

Voor mij was het afgelopen trainingsjaar een bijzondere ervaring. Het was leuk om me met een groep oud-deelnemers in te zetten bij de voorbereiding van de deelnemers op de IMO in Amsterdam. Op het eerste gezicht is het misschien jammer dat je geen buitenlandse reis maakt, maar juist bij een thuiswedstrijd is er extra aandacht vanuit het eigen land. Ook de deelnemers uit andere landen tonen extra aandacht voor het organiserende land. Dit in combinatie met de training biedt alle mogelijkheden voor een fantastisch resultaat.

Over de auteur
Maarten Roelofsma is tweedejaars student wis- en natuurkunde aan de Universiteit Utrecht. In 2008 en 2009 heeft hij deelgenomen aan de internationale olympiade in respectievelijk Madrid en Bremen. Daarnaast nam hij in 2009 deel aan de eerste Benelux-Olympiade met als resultaat een zilveren medaille. Momenteel is hij betrokken bij de organisatie van IMO2011 die in juli plaatsvindt, en traint hij de deelnemers aan deze olympiade.
E-mailadres: *maarten.r91@hotmail.com*

Meervoudige intelligentie in de wiskundeles

BIJ REKENEN, OPPERVLAKTE, VERGROTEN, GONIOMETRIE, VERBANDEN

[Ingrid Berwald]

Deel 4 – Goniometrie

Er zijn acht meervoudige intelligenties; ieder mens beschikt over al deze acht intelligenties, waarbij de ene intelligentie bij de één sterker is ontwikkeld dan bij de ander. Als een intelligentie een kind boeit en de intelligentie wordt verwerkt in een instructie of een andere verwerking van de leerstof, dan neemt het kind de leerstof beter op. Dit is gebleken uit onderzoeken van de Amerikaanse hoogleraar Howard Gardner. Diens motto is: ‘Het gaat er niet om hoe intelligent je bent, maar om hoe je intelligent bent’. Iedereen is op zijn eigen manier knap. Vandaar de omschrijvingen bij de volgende intelligenties:

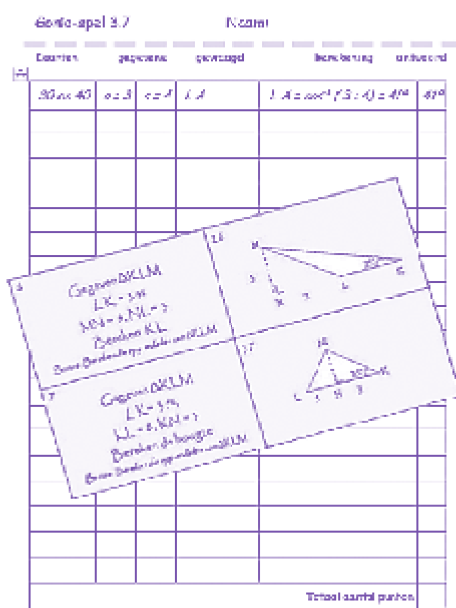
1. Verbaal – Linguïstisch (taalknap)
2. Logisch – Mathematisch (rekenknap)
3. Visueel – ruimtelijk (kijkknap)
4. Muzikaal – ritmisch (muziekknap)
5. Lichamelijk – kinesthetisch (bewegingsknap)
6. Naturalistisch (natuurknap)
7. Interpersoonlijk (samenknap)
8. Intrapersoonlijk (zelfknap)

In onderstaand artikel komt het gebruik van verschillende intelligenties bij het onderwerp goniometrie aan bod. Het is het vierde deel in een serie van vijf artikelen.[1]

Bij het aanleren van goniometrie komt nogal wat kijken. De leerlingen moeten leren zien of een zijde de schuine zijde is, of juist de aanliggende of de overstaande rechthoekszijde. Daarna moet de juiste keuze gemaakt worden tussen sinus, cosinus en tangens, om vervolgens daarmee de juiste berekening uit te voeren. Met de logisch wiskundige manier die het boek aanbiedt, bereikten wij lang niet de hele klas. We besloten als sectie iets te bedenken waardoor meer leerlingen goed konden leren rekenen met goniometrie. Uiteraard wilden we een andere intelligentie gebruiken dan de logisch wiskundige.

Gegeven, gevraagd, berekening, antwoord

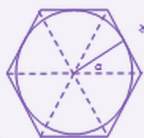
Na een bezoek aan een basisschool waar ook gewerkt wordt met meervoudige intelligenties, kwamen we op het volgende idee. We zetten de opgaven uit het boek steeds op twee kaartjes, op het ene kaartje de tekening of schets, op het andere kaartje de gegevens en het gevraagde, de kaartjes hebben we laten drukken als memoryspel, zodat ze nog jaren te gebruiken zijn (***zie figuur 1***).[2] We zorgden er wel voor dat de vraag niet zonder de tekening opgelost kon worden. Voor de leerlingen maakten we een standaard antwoordenblad met vier kolommen. Als eerste ‘gegeven’, dan ‘gevraagd’, gevolgd door ‘berekening’ en ‘antwoord’. In de klas kreeg elke leerling een antwoordblad en een kaartje.
De les begint met het zoeken van de juiste tekening bij een vraag. Zodra twee leerlingen elkaar gevonden hebben, moeten ze samen de vraag beantwoorden. Ieder noteert de oplossing op zijn of haar eigen blad. Met de oplossing komen ze dan naar mij toe, als het goed is krijgen ze een krul en een nieuw kaartje. Bij een fout antwoord krijgen ze uitleg en een nieuwe kans om het goed op te schrijven. Van mij vraagt het wel wat vaardigheden. De kaartjes moet ik zo op een stapel leggen dat het niet te lang duurt voor de tekening van een vraag in de klas komt; het zoeken moet beperkt blijven. Aan de andere kant moet ik er voor zorgen dat de leerlingen niet steeds met dezelfde partner samenwerken. Daarnaast kan het soms ineens heel druk worden aan mijn tafel. De meeste sommen zijn opgaven uit het boek, toch werken de leerlingen tijdens deze les veel harder dan wanneer de opgaven uit het boek gemaakt moeten worden. Er ontstaat een beetje een competitie, de zwakke leerling krijgt veel hulp, maar treft ook af en toe een andere zwakke leerling en moet het dan toch zelf op gaan lossen. De sterkere leerling helpt wat vaker en leert daar dan weer van.
Elk jaar denk ik weer, je moet het niet te vaak doen, maar wat is het een leuke les, waarbij de leerlingen echt hard werken. Collega’s die van deze les horen, zijn soms bang van de drukte of het gedrag van de leerling in zo’n vrije situatie. Dat de les drukker is dan een werkles uit het boek, klopt wel. Maar wat is drukker? Ik heb het drukker, doordat er steeds leerlingen een antwoord komen laten zien. Het geregel van de kaartjes geeft ook drukte, maar dat is allemaal mijn druk. Als ik naar mijn leerlingen kijk, zie ik alleen maar actieve leerlingen die aan het werk zijn. Het is geen herrie, er is geen gegil of iets anders wat docenten volgens mij onder drukte kunnen verstaan. De leerlingen lopen wel als ze op zoek zijn naar hun partner, maar alleen bij het eerste kaartje, als iedereen tegelijk op zoek is, is het even druk. Daarna wachten ze meestal in mijn buurt tot de tekening bij de vraag wordt uitgedeeld. Ik zorg ervoor dat het eerst volgende koppel die tekening krijgt en deel altijd aan een groepje dat komt, twee vragen uit en het groepje erna



figuur 1

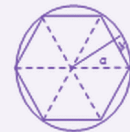
Archimedes bedacht de volgende manier om de omtrek van een cirkel en daarmee het getal n te berekenen:
Hij tekende een zeshoek om de cirkel. Van de zeshoek kon hij de omtrek bepalen:

5 Bereken hoek α
6 Neem straal = ½, bereken x.
7 Bereken de omtrek van de zeshoek.
Waarom is de omtrek ongeveer gelijk aan pi?



De omtrek van de cirkel is kleiner dan de omtrek van de zeshoek, daarom tekende hij ook een zeshoek in de cirkel:

8 Bereken y.
9 Bereken de omtrek van de zeshoek.



De omtrek van de cirkel ligt ergens tussen de omtrek van de twee zeshoeken in.

10 Bereken het gemiddelde van de twee omtrekken.
11 Hoe nauwkeurig heb je π nu berekend?

figuur 2

In de geschiedenis van de wiskunde hebben heel veel mensen geprobeerd om zoveel mogelijk decimalen van π te vinden. We noemen er een paar:

NAAM	JAARTAL	AANTAL DECIMALEN
Archimedes	(220 v CHR)	4
Ludolph van Ceulen	(1610)	35
John Machin	(1706)	100
Johann Dase	(1844)	200
William Shanks	(1853)	707
ENIAC	(1949)	2.037
CDC 6600	(1967)	500.000
Guilloud and Bouyer	(1973)	1.000.000
Tamura & Kanada	(1983)	16.777.216
Chudnovsky brothers	(1989)	1.011.196.691
Yasumasa Kanada	(1989)	1.073.740.000
Chudnovsky brothers	(1991)	2.160.000.000
Yasumasa Kanada	(1995)	3.221.220.000

figuur 3

krijgt de twee tekeningen die erbij horen. Zo hoeven ze niet te lang te wachten. Op een gegeven moment hoor je de leerlingen steeds zeggen dat ze het kaartje al gehad hebben, dat is het moment waarop ik de les ga beëindigen. Wij hebben lessen van 100 minuten, met de uitleg en de nabespreking kom ik precies uit. Honderd minuten dezelfde sommen uit het boek maken kost mij in elk geval veel meer moeite. We gebruiken deze les op de mavo, de havo en het vwo. Sinds we gonio zo uitleggen, zijn de examenresultaten van dit onderdeel op de mavo enorm gestegen. Soms hebben alle leerlingen de gonio-vraag goed.

Archimedes

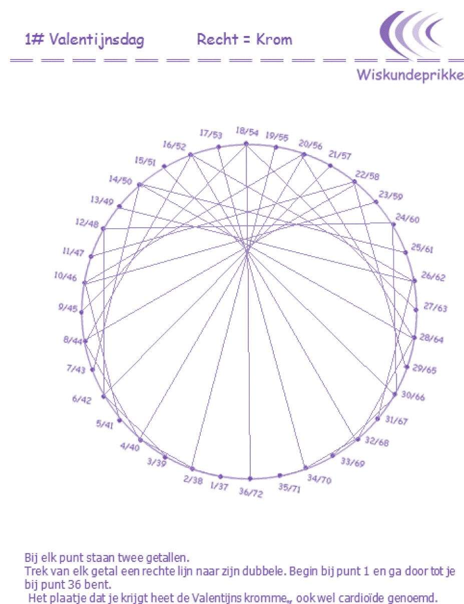
Een andere les is die van Archimedes. Ik laat de klas zien hoe Archimedes 220 jaar voor Christus het getal pi op vier decimalen benaderde (***zie figuur 2***). Op de rekenmachine lukt het om op deze manier pi op 12 decimalen te benaderen. Ik laat de leerlingen een tabel zien met diverse wiskundigen en het aantal decimalen van pi dat er door de jaren heen gevonden werden. Ze kunnen zichzelf mooi in het lijstje plaatsen (***zie figuur 3***). De meesten realiseren zich wel dat zij nu wel een rekenmachine hebben die er vroeger niet was. Ook kun je aan het aantal decimalen dat gevonden is, precies zien wanneer er een computer gebruikt werd. Natuurlijk leren we ook de spreuk: 'I like a drink, pepsicola of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics.' Het aantal letters van een woord is een getal. Zo kun je de eerste veertien decimalen van het getal pi gemakkelijk onthouden.

Hartje

Op Valentijnsdag krijgen de leerlingen uit de derde klas de volgende formule van mij: $r = 3(1 - \sin \alpha)$ waarbij r de straal is en α de hoek. Als je deze functie tekent,



figuur 4



figuur 5

krijg je een cardioïde, een wiskundig hartje (***zie figuur 4***). Hetzelfde hartje tekenen de leerlingen in klas 1 en 2 ook op Valentijnsdag (***zie figuur 5***), maar steeds met een heel andere opdracht erbij.

Noten (red.)

[1] De delen 1, 2 en 3 van deze artikelenserie staan opvolgend in *Euclides* 86(4), pp. 154-155, in *Euclides* 86(5), pp. 189-190 en in *Euclides* 86(6), pp. 240-241.

[2] U kunt dit gonio-spel zelf ook laten drukken. Daartoe gaat u naar *www.memorymaken.nl*, kies 'Shop', typ het woord *gonio* achter 'Titel' in en klik op 'Zoeken'. U vindt dan twee spellen: een spel met de vragen (gonio vragen) en een spel met de antwoorden (gonio driehoeken). Doordat bij memory alle kaartjes er twee keer in zitten, moet u dus van beide een spel bestellen. U ontvangt dan twee mooie blikjes waarmee u twee complete spelen kunt maken.
Het antwoordenblad dat precies in het doosje past, kunt u opvragen bij Ingrid Berwald.

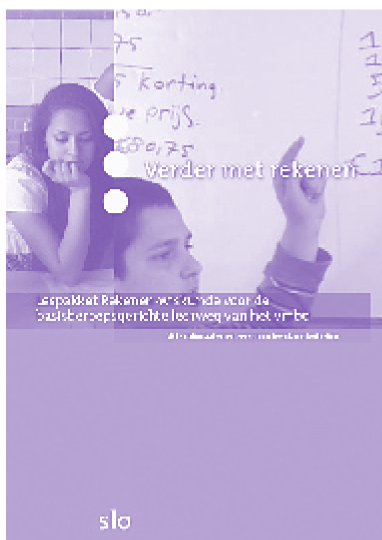
Over de auteur

Ingrid Berwald is docente wiskunde aan het IJsselcollege in Capelle aan den IJssel. Ze geeft les aan vmbo-, havo- en vwo-klassen en vindt het belangrijk dat alle leerlingen positieve ervaringen opdoen tijdens het vak wiskunde.
E-mailadres: *i.berwald@ijsselcollege.nl*

Lesmap 'Verder met Rekenen'

VOOR HET VMBO BESCHIKBAAR

[Kees Buijs]



Nogal wat leerlingen die het vmbo binnenkomen, beschikken over een gebrekkige rekenvaardigheid. Dit geldt zeker ook voor de leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg, de voornaamste doelgroep van het project 'Verder met rekenen'. Het gebeurt nogal eens dat deze leerlingen in het basisonderwijs vanaf groep 5 of 6 moeite hadden om de rekenlessen te volgen en dat ze in groep 7 of 8 het spoor min of meer bijster zijn geraakt. Deze gebrekkige rekenvaardigheid komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in situaties als:

- Niet in staat zijn elementaire hoofdrekenopgaven zoals 80 + 47, 5 × 24 en 120 : 4 vlot op te lossen.
- Geen inzicht hebben in de opbouw van ons maatstelsel en daardoor niet in staat zijn om centimeters in meters of milliliters in liters om te zetten.
- Elementaire getalsmatige informatie in de krant, op de tv of op het etiket van voedingsmiddelen niet goed begrijpen.
- In winkelsituaties niet in staat zijn om bijvoorbeeld zelf een korting van 15% op een bloesje van 32 euro uit te rekenen.

Bestaande lesmaterialen in het vmbo voorzien veelal niet in de leerbehoeften van deze categorie leerlingen. Weliswaar bevatten de wiskundemethoden in klas 1 enkele hoofdstukken die op rekenen betrekking hebben, maar hierin wordt er veelal vanuit gegaan dat de rekenvaardigheid bij aanvang reeds op een redelijk peil is, zodat volstaan kan worden met een beknopte samenvatting van wat op de basisschool geleerd is. Daarnaast zijn er recentelijk een aantal oefenprogramma's in omloop gekomen die zich vooral op individueel oefenen van basiskennis en standaardprocedures van het rekenen richten. Het valt echter te betwijfelen of dergelijke programma's effectief zijn, gelet op het feit dat het onderwijs voor de betreffende leerlingen in de groepen 7 en 8 veelal ook gericht was op individueel oefenen.

Om met name een bijdrage te leveren aan het verbeteren van de rekenvaardigheid van de categorie leerlingen in de basisberoepsgerichte leerweg met leerwegondersteuning, is voor klas 1 het lespakket 'Verder met rekenen' ontwikkeld. Daarbij is een selectie gemaakt uit leerstof die voor deze doelgroep van essentieel belang is, rekening houdend met de referentieniveaus uit het Referentiekader Doorlopende Leerlijnen. Gekozen is voor drie domeinen die zowel voor de doorgaande lijn naar de bovenbouw van het vmbo als met het oog op maatschappelijke redzaamheid van belang zijn. Dit betreft:

1. Geld en ons geldsysteem;
2. Procenten en verhoudingen;
3. Meten en ons maatstelsel.

In de wijze waarop deze leerstof aan de orde komt, is aansluiting gezocht bij didactiek en organisatie van het basisonderwijs, echter zonder dat leerlingen in het vmbo de leerstof en didactische werkwijzen als 'kinderachtig' zullen ervaren. Gekozen is voor een op de ontwikkeling van inzicht gerichte, interactieve onderwijsbenadering waarbij gebruikssituaties (voor de leerlingen relevante situaties uit het alledaags leven of uit de beroepspraktijk) als uitgangspunt zijn gekozen. Er wordt aangesloten bij de eigen, informele kennis van leerlingen en er is veel aandacht voor het leren hanteren van informele, modelondersteunde werkwijzen. Het ontwikkelde pakket bestaat uit 24 werkbladen (elk bestaand uit drie pagina's) met bijbehorende lesbeschrijvingen en achtergrondinformatie met betrekking tot leerlijnen. Als additioneel materiaal zijn een hoeveelheid meetinstrumenten nodig, een aantal attributen om meetactiviteiten in de klas te kunnen uitvoeren, en een klassikale set namaakgeld.

Over de resultaten van het op een aantal proefscholen gebruikte lespakket werd eerder reeds in *Euclides* gerapporteerd; zie het artikel *Werken aan rekenvaardigheid in het vmbo* van K. Buijs, in nummer 8 van jaargang 84 (p. 281-285).

Lesmap

De lesmap waarin deze materialen zijn ondergebracht, is thans beschikbaar. Op aanvraag wordt deze map aan geïnteresseerde scholen toegezonden. Ook is het materiaal als download op de SLO-website beschikbaar:
www.slo.nl/downloads/2010/verder-met-rekenen.pdf

Over de auteur
Kees Buijs is als leerplanontwikkelaar werkzaam voor de SLO te Enschede.
E-mailadres: *c.buys@slo.nl*

Tangram tekenen

EEN LEERZAME ONDERBOUWLES

[Joeri van Ast en Harrie Broekman]

In dit artikel beschrijven we een voorbeeld van een concrete les rondom het door de leerlingen zelf maken van tangram-puzzelstukjes. Allereerst zal een verduidelijking gegeven worden van de gebruikte opdracht (tekenen en redeneren) evenals de reden waarom een opdracht als deze past bij de OSB (Open Schoolgemeenschap Bijlmer). Vervolgens wordt de opdracht gepresenteerd, samen met een aantal gegevens over het lesverloop. Tot slot volgen nog enkele o.i. vermeldenswaardige ervaringen en een samenvattende conclusie.



Waarom deze opdracht? Waarom op deze school?

Alle deelnemers aan de jaarlijkse dagconferentie, die door het instituut ELAN van de Universiteit Twente op 20 januari 2010 werd georganiseerd, kregen van de organisatie een '7 piece tangram' cadeau. Leuk voor thuis, maar zeker als wiskundeleraar vraag je jezelf ook af of je er iets mee kunt in bijvoorbeeld de eerste of de tweede klas. En dat blijkt te kunnen als je *iets* wilt met hoeken, lengtes en mogelijk oppervlakte. Maar dan heb je aan één doosje niet genoeg en zul je ook specifieker moeten zijn over wat je dan wilt. Dus, spelen, denken, in oude aantekeningen zoeken en met een 12/14-jarige praten. Het resultaat is een opzetje voor een les(je) met *tekenen, verklaren, knippen, samenvoegen* en *nog meer verklaren;* en niet te vergeten *voorspellen*.
Deze houding van het zoeken naar mogelijkheden om materiaal van buiten de school (dus extra naast het boek) te benutten voor 'lessen op school' sluit aan bij een oude traditie op de OSB. Op de OSB wordt namelijk al vanaf het begin van haar bestaan gezocht naar mogelijkheden om het wiskundeonderwijs voor de heterogene onderbouw groepen (vmbo-basis t/m vwo) zo in te richten dat meerdere 'aspecten van leren' aan bod komen. Op de OSB wordt in de eerste twee jaren gewerkt met als een van de uitgangspunten dat we de leerlingen willen helpen door middel van het aanspreken van hoofd (denken, waaronder reflecteren), hart (plezier, inzet, …) en handen (leren door doen). Bij de tangram-activiteit die in dit artikel beschreven wordt, komen alle drie aan bod, aangevuld met een ander speciaal aandachtspunt op de OSB, het hanteren van de Nederlandse taal (zowel gesproken als geschreven). Dit laatste dient uiteraard bij alle onderwijs het geval te zijn, maar het is op de OSB van extra belang gezien de diversiteit aan culturen en de soms grote verschillen in 'geletterdheid' in de thuissituatie van onze leerlingen.
De beschreven tangram-opdracht levert een niet al te ingewikkelde mogelijkheid om zowel een stapsgewijs beschreven procedure te volgen, als deze te controleren en eventueel te beargumenteren.
Uiteraard hoort aan dit 'procedure volgen', 'controleren' en 'beargumenteren' zo veel mogelijk aandacht besteed te worden in zoveel mogelijk lessen. Maar hiervoor dienen dan wel stimulansen te zijn vanuit het vakinhoudelijke en/of de docent [1].
Het is op onze school gebruikelijk dat de leerlingen in de onderbouw een groot deel van de lestijd in heterogene tafelgroepjes van vier leerlingen aan het werk zijn. De ervaring leert dat onze vmbo-leerlingen verbaal sterk zijn en over het algemeen ook in het werken met hun handen (o.a. tekenen van figuren en grafieken).
De havo/vwo-leerlingen zijn sterker in het leggen van verbanden (theorie). Door een zo heterogeen mogelijke samenstelling van de tafelgroepjes wordt geprobeerd ze elkaar te laten helpen.
Gezien deze gewoonte werd niet gekozen voor een klassikaal interactieve werkwijze, maar voor het maken van de opdracht in tweetallen en/of viertallen. Pas als het groepje een vraag/deelopdracht niet kon beantwoorden/kon maken mocht om hulp gevraagd worden. De leerlingen moesten eerst samen een 'proefversie' maken en voerden pas daarna ieder voor zich de opdracht uit.
Als laatste overweging vooraf willen we noemen dat we de leerlingen leren om 'tot nadenken stimulerende vragen' niet over te slaan. We kiezen daarvoor vaak vragen die er voor zorgen dat ze 'nette tekeningen' maken [2], schattingen vooraf maken en daarmee de gevonden antwoorden 'confronteren'. In de onderstaand opdracht wordt gebruik gemaakt van vragen die er voor zouden kunnen zorgen dat de leerlingen na iedere tekenstap kort een pas op de plaats maken. Dat zit hem niet altijd in grootse zaken, maar veelal juist in kleine vragen – zoals de bij opdracht 4b gestelde vraag 'wat is dit voor figuur?' – die bedoeld is om de leerlingen extra alert te maken op verschillen en overeenkomsten tussen de diverse getekende figuren.
Deze overwegingen en die ten aanzien van de mogelijke voorkennis van de leerlingen wat betreft de begrippen *hoek*, *deellijn, oppervlakte* en de te hanteren *werkwijze* zijn door ons vooraf besproken en benut bij het samenstellen van de opdracht *Tangram in 11 stappen* (zie hierna).

Tangram puzzelstukjes maken: de opdracht

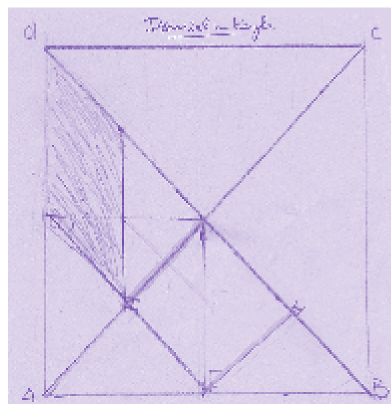
Aanwijzingen voor de docent
Ieder groepje leerlingen heeft een vel A4-papier (liefst wat dikker papier of dun karton) en een vel met de door ons ontwikkelde opdrachten/vragen (Tangram in 11 stappen).
De docent vertelt de leerlingen dat als zij de aanwijzingen opvolgen, ze niet alleen aantonen dat ze kunnen 'tekenen'. Ze kunnen dan ook laten zien dat ze al iets weten over het berekenen en beredeneren van oppervlaktes, terwijl dit tot op het moment van gebruiken (klas 1) nog niet behandeld is. Er wordt van uit gegaan dat de leerlingen slechts summiere basisschoolkennis hebben ten aanzien van

figuren, oppervlakte en *hoeken.* De gebruikte begrippen zijn dus relatief nieuw voor de leerlingen. Voor vrijwel alle brugklasleerlingen geldt dat zij enige ervaring hebben met het 'samen' proberen ergens uit te komen, hun kennis te 'delen' en daardoor duidelijkheid te verkrijgen over wat van ze verwacht wordt ten aanzien van het *doen* zowel als ten aanzien van het *beantwoorden* van de vragen.
En dat is/was ons voornaamste doel met deze opdracht: *door samen – in groepjes van twee of meer leerlingen – aan deze opdracht te werken wordt aanwezige kennis gemobiliseerd en gedeeld, waardoor een gesprek op gang komt over het berekenen en beredeneren van oppervlaktes en hoeken.*

Tangram in 11 stappen

1. *Teken* evenwijdig aan de onderrand een lijnstuk van 10 cm lengte. *Noem* de eindpunten A en B.
   A ________________________ B
2. *Teken* vanuit B een lijn loodrecht op AB. Punt C ligt 10 cm boven punt B. *Teken* dit.
3. *Teken* vanuit A een lijn loodrecht op AB. Punt D ligt 10 cm boven punt A. *Teken* dit.
4. *Teken* nu de lijn DC [met rood].
   a. Wat voor figuur krijg je dan?
   b. Leg uit waarom. [zie voor gegeven antwoorden 'ervaring 3']
   c. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de figuur $ABCD$? [zie 'ervaring 4']
5. *Verdeel* de hoek ABC in twee gelijke hoeken. *Teken* de deellijn van hoek ABC rood.
   a. Waar komt deze lijn uit als je hem door trekt?
   b. Wat valt je op aan driehoek DAB?
6. *Verdeel* de hoek DCB in twee gelijke hoeken. *Trek* de deellijn door [met rood] van het punt C naar de lijn BD. *Noem* het punt waar die lijn bij de lijn DB komt E.
   a. Waar ligt E op BD?
   b. Hoeveel graden zijn de hoeken bij E? [zie 'ervaring 5']
   c. Weet je hoeveel graden hoek DCE is?
   d. Hoe weet je dat?
   e. Hoe vaak past ΔDBC in het vierkant? [we gebruiken in het vervolg Δ voor 'driehoek']
   f. Hoeveel is de oppervlakte dus? [zie 'ervaring 4']
7. *Deel* het lijnstuk AB door midden en noem dit midden F. *Deel* het lijnstuk DA door midden en noem het middelpunt G. *Verbind* F met G [met rood].
   a. Hoeveel graden is hoek FAG?
   b. Hoeveel graden is hoek AGF?
   c. Hoe vaak past ΔAFG in ΔABD?
   d. Hoeveel is de oppervlakte van ΔAFG?
   e. Kun je dat uitleggen?
8. *Teken* het punt H op de helft van EB. *Teken* punt I op de helft van FG.
9. *Verbind* F met H [met groen] en *verbind* I met E [ook met groen].
   a. Hoeveel van de driehoekjes FHB passen in het grote vierkant?
   b. Leg uit waarom.
   c. Wat is de oppervlakte van vierkant $FHEI$?
10. *Teken* het punt J op de helft van DE.
11. *Verbind* I met J [met zwart].
   a. Vergelijk de ΔJIE met ΔFBH.
   b. Wat valt je op?
   c. Beredeneer hoeveel de oppervlakte van $GIJD$ is.

De 7 figuren die je nu getekend hebt, vormen de stukjes van wat genoemd wordt een zevendelige **Tangram**. Je kunt er veel verschillende figuren mee vormen door de zeven 'Tans' uit te knippen en vervolgens 'passende' stukjes aan elkaar te leggen. Je kunt je daarbij bijvoorbeeld afvragen welke figuren je kunt vormen door twee Tans 'passend' aan elkaar te leggen, of drie, of vier, etc.



figuur 1

Het in de praktijk gebruiken van de beschreven opdracht

Hier volgen enkele achtergrondgedachten bij deze tangram-opdracht, en onze verwachtingen ten aanzien van de mogelijke 'opbrengst'.
We gaan ervan uit dat het benoemen, beredeneren en opschrijven van argumenten de leerlingen niet alleen 'uitdaagt/dwingt' om na te denken maar hen ook helpt om hetgeen ze 'gedaan/getekend' hebben beter te onthouden. Hiervoor zijn leerspychologische en vakdidactische argumenten (Van Hiele, zie [3], en Vygotskij, zie [4]).
Verder is het in onze huidige maatschappij zo dat goede verbale kwaliteiten sociaal en financieel gewaardeerd worden ondanks dat dit tegelijk gezien kan worden als een negatief gevolg van de opmars van vorm en presentatie boven inhoud(?). Hoe dan ook, het leren verwoorden van het intuïtief/visuele vormt een basis voor beheersing/inzicht.
Zoals reeds aangegeven zijn in het eerste leerjaar – op het moment van het maken van de opdracht – de begrippen *hoek, deellijn* en *oppervlakte* nog niet aan bod geweest. Ervaring heeft geleerd dat slechts een klein deel van de leerlingen er al wel een notie van heeft vanuit dagelijks leven en/of basisonderwijs. Vooraf verwachten we desondanks dat er toch meerdere manieren gekozen worden om een deellijn te 'maken' (vouwen, schatten/schetsen, geodriehoek). Vanwege de te verwachten problemen met 'oppervlakte' van andere figuren dan vierkant en half-vierkant is bijvoorbeeld de vraag naar de oppervlakte van driehoek FHB (punt 6 van de opdracht) vervangen door 'Hoeveel driehoekjes FHB passen in het grote vierkant?' [als opstapje naar het later uitvoerig aan bod komende onderwerp 'oppervlakte van figuren']

Enkele vermeldenswaardige ervaringen

De keuze om de doe-opdrachten visueel te onderscheiden van de wat-, hoeveel-, waar-, uitleg-vragen, maakte dat leerlingen niet stopten als ze moeilijkheden hadden met het formuleren van hun antwoorden (zoals bij een eerdere versie van de opdracht).
Het doe-deel van de opdracht leidde voor vrijwel alle leerlingen – volgens henzelf – tot een bevredigend resultaat. Hierbij dient wel opgemerkt te worden dat de kwaliteit (de precisie) ons inziens nogal eens te wensen overliet. Opvallend was daarbij dat met name vmbo leerlingen uiterst precies stap voor stap de doe-opdrachten uitvoerden en daar duidelijk 'blij' mee waren (net als wij overigens).
Anders dan verwacht ging het verdelen van hoeken in vrijwel alle groepjes goed (veelal intuïtief schetsend en/of met een geodriehoek). Wel was het zo dat lang niet alle groepjes een 'nette' tekening of goede schets leverden.



foto 1 Samenwerkende leerlingen: Jim en Amy

Bij ‘deel *AB* doormidden’ trokken vrijwel alle leerlingen het lijnstuk *EF*. Toen bij enkele groepjes gezegd werd dat het voldoende was om een stip te zetten bij dit midden, was de reactie: ‘*waarom staat dat er dan niet gewoon*?’
Bij het beantwoorden van de *vragen* kwamen zeer grote verschillen naar voren tussen de leerlingen qua inzet, taalbeheersing en – uiteraard – niveau. Overigens gold voor vrijwel alle leerlingen dat hoe verder ze kwamen met de opdracht hoe minder de vragen beantwoord werden.
Ter illustratie geven we hier antwoorden die gegeven werden op de vragen “wat voor figuur is *ABCD*? Waarom?”.

- Vierkant. [geen antwoord op de ‘waarom’ vraag]
- Vierkant. Dat zie je zo.
- Vierkant. Het heeft 4 hoeken.
- Vierkant. Er zijn 4 gelijke zijden.
- Vierkant. Hij heeft 4 gelijke zijden en hoeken.
- Vierkant. Omdat hij 4 kanten heeft.
- Vierkant. Hij heeft vier gelijkzijdige kanten.
- Vierkant. Ze lopen evenwijdig.
- Vierkant. Omdat de zijden allemaal 10 cm zijn.
- Vierkant. Omdat het 10 × 10 is.

Schitterende startpunten voor een samenspraak (onderwijsleergesprek) maar dat paste op dat moment niet in de lesopzet. Dus werd hierop een volgend lesuur ingegaan.
Ook al is het *berekenen van oppervlaktes* van rechthoeken op alle basisscholen aan bod geweest komen bij de vraag naar de oppervlakte van *ABCD* niet alleen het antwoord 10 × 10 = 100, maar ook (het bekende) 4 × 10 = 40, en zelfs 10 + 10 = 20.
Opmerkelijk is ook dat een vraag naar de oppervlakte van driehoek *DBC* (nadat gevraagd is ‘welk deel is *DBC* van het vierkant?’ en in de latere versie ‘hoe vaak past driehoek *DBC* in het vierkant?) slechts door een deel van de leerlingen beantwoord werd met 50 (of 20(!), afhankelijk van de ‘berekende’ oppervlakte van het vierkant). Er komen verder antwoorden als 1400 (product van de drie zijden) en 140 (product van langste zijde en een andere zijde). En wat te denken van de twee leerlingen die noteerden dat de oppervlakte van *ABCD* 100cm^2 is, *DBC* de helft is van *ABCD* en de oppervlakte van *DBC* 400 m^2 is?
Bij de vraag naar de oppervlakte van driehoek *AFG* geven meerdere leerlingen het antwoord 25, en bij de verklaring komt veelvuldig 5 × 5 (product van de rechthoekszijden!); ook bij leerlingen die de vorige oppervlakte-vragen juist hebben beantwoord en ‘beargumenteerd’.

Zonder extra hint/aanwijzing wisten enkele leerlingen dat een rechte hoek 90 graden is; enkele anderen dat een ‘gestrekte hoek’ 180° is. Met individuele hulp per groepje (hint met aanwijzen: ‘een heel rondje is 360°’) kwamen veel leerlingen zelf op 180°, resp. 90° en 45°.
Zoals vermeld ging het tekenen van deellijnen ‘als vanzelf; zonder veel discussie’. Ook de loodlijnen werden getekend, nadat in de meeste groepjes een flinke discussie was geweest over waar het lijnstuk *AB* getekend moest worden. Slechts een enkeling vroeg aan klasgenoten of docent wat ‘loodrecht’ was.
Wat betreft de samenwerking werd vrij snel duidelijk dat in de viertallen vrij weinig echt overleg plaats vond. In de meeste gevallen deed 1 leerling het werk, soms samen met een tweede leerling. De rest hing er maar een beetje bij. De beslissing om in de andere klassen met tweetallen te werken leverde direct aantoonbare verbetering op; er werd intensief overlegd met als gevolg o.a. duidelijker vragen aan de begeleiders. Bovendien werd de succeservaring van de leerlingen groter.

Conclusie en vooruitblik

Het tekenen was leerzaam en werd door de meeste leerlingen als ‘leuk’ ervaren.
Vooral de vmbo-kaderleerlingen deden de opdracht stapsgewijs en hadden succes ervaringen. Een aantal havo/vwo-leerlingen had – achteraf gezien – behoefte aan ‘overzicht vooraf’ van waar naar toe gewerkt werd. Zij vonden het stapsgewijs tekenen ook ‘moeilijker’ en in een paar gevallen ‘vervelender’.
De opstap richting oppervlakte (en hoek meten) is gezet, maar misverstanden rond optellen/vermenigvuldigen van lengtes is groter dan vooraf verwacht.
In de toekomst is het zeker nodig onze leerlingen vaker in de gelegenheid te stellen het werken met de handen, het tekenen, en het beantwoorden van vragen over hetgeen ze ‘gedaan’ hebben vergezeld te laten gaan van de mogelijkheid om hun ‘argumenten’ (dus het *waarom*) te verwoorden. Maar we willen graag de vraag ‘*wat heb je tot nu toe gedaan?*’ zo vaak aan de leerlingen gaan stellen dat ze zich die vraag - vaker dan nu - ook zichzelf gaan stellen als aanzet tot inhoudelijke reflectie. Maar dat geldt volgens opmerkzame collega’s vermoedelijk niet alleen voor deze heterogene groep

leerlingen, maar ook voor de vmbo-(kader) leerlingen in hogere leerjaren.
De opmerking van de tweede auteur (Harrie) dat het zinvol zou kunnen zijn om een lesopzet te maken met als thema 'het maken van tangram-puzzelstukjes' en die eens uit te proberen, werd door de eerste auteur (Joeri) opgepakt. Het leverde een paar leerzame gesprekken, maar vooral ook lessen op; leerzaam voor de leerlingen, de docent (Joeri) en de inbrenger (Harrie). Vanzelfsprekend hadden we achteraf ook kritiek op onze eerste lesopzet en de uitvoering, hetgeen resulteerde in het hier besproken gewijzigde ontwerp voor de twee volgende klassen.
Eén ding is in ieder geval duidelijk, we zijn blij dat we deze opdracht aan onze heterogene groep leerlingen hebben voorgelegd, omdat de leerlingen hierdoor konden ervaren dat ze door het gebruiken van de kennis die ze al hebben met elkaar iets nieuws kunnen leren.
Een stukje uit een door leerlingen geschreven verslagje van de les (vrijwillig en direct na schooltijd geschreven en ingeleverd) was voor ons een extra motivatie om meer van dit soort lessen te gaan verzorgen (zie onder).


foto 2 Samenwerkende leerlingen: Ritu en Soraya

De opdracht 'Tangram in 11 stappen' zullen we in de toekomst zeker nog eens gebruiken, niet als tussendoortje, maar als 'opstap' voorafgaand aan de behandeling van *oppervlakte* en/of *hoeken*. In volgende lessen bleek het bijvoorbeeld heel inspirerend om dieper in te gaan op vragen over de mogelijke oppervlaktes of de mogelijke omtrekken van de deelfiguren. En er zijn meer mogelijkheden, bijvoorbeeld: wat valt er te zeggen over de verhouding van de oppervlaktes van de zeven tans?
Kortom: er valt van alles te ontdekken, te overleggen en te beargumenteren.

Wordt wiskunde populair ???
Het was dus duidelijk we kregen een stencil en gingen aan de slag. Goed lezen, dat is wel duidelijk bij wiskunde.
De eerste vraag, meteen al en vraag waar je duidelijk je best op moest doen: 'Teken evenwijdig aan de onderrand een lijnstuk van 10 centimeter lengte. Noem de eindpunten A en B.'
Oké, na 10 keer de vraag te hebben gelezen, vroegen we toch maar voor de zekerheid aan Meester Harrie of we de vraag goed hadden, we hadden al een lijntje van 10 cm met aan het einde staan: 'A en B'. Meester Joeri kwam en zei: ' Jullie hebben de opdracht goed gemaakt, dus ga maar door naar opdracht 2!'
O, oké. We hadden even te moeilijk gedacht.
Tot slot vonden we het een geslaagd uurtje!! Het was erg leerzaam, je moest er wel een paar keer over nadenken en het een aantal keer overlezen, maar dan weet je ook wel wat meer.
Anna en Karishma

Noten

[1] Uitgangspunt is dat taal, leren en denken onlosmakelijk met elkaar zijn verbonden. Taalgericht vakonderwijs zoekt naar mogelijkheden om leren en taal aandacht te geven in de vaklessen. De vakinhoud staat voorop, en daarover praat en schrijf je met elkaar in vaktaal. Aandacht voor taal betekent dan dubbele winst. De leerling begrijpt het vak beter en werkt bovendien aan zijn of haar taalvaardigheid.

[2] In hogere leerjaren is het maken van een 'schetsje' eveneens van belang ook in de algebra bij grafieken.

[3] Dr. P.M. van Hiele (1997): *Structuur.* Zuthphen: Thieme. 'Bij de interactie tussen werkelijkheid en individu kan de taal zeer bevorderlijk werken' (p. 87) en 'Op het visuele niveau wordt de taal gebruikt om over waargenomen structuren met anderen te kunnen spreken en ook om het eigen denken te steunen. De structuur wordt als het ware opgeroepen door de naam waarmee ze wordt aangeduid' (p. 95).

[4] L.S. Vygotskij (1978): *Mind in Society.* Cambridge (MA): Harvard University Press. 'Taal heeft een organiserende rol in de ontwikkeling van kennis'.

Over de auteurs

Joeri van Ast is docent aan de OSB (Open Schoolgemeenschap Bijlmer) in Amsterdam Zuidoost.
Harrie Broekman was tot zijn pensionering lerarenopleider en vakdidacticus aan de Universiteit Utrecht. Op dit moment begeleidt hij nog een aantal wiskundeleraren en vakgroepen, o.a. op de OSB.
E-mailadressen: *JoerivanAst@openschoolgemeenschapbijlmer.nl* en *h.g.b.broekman@uu.nl*

Wiskunde met de vingers

ONTWIKKELING VAN WISKUNDE VANUIT DE VISIE VAN NIEUWE SCHEIKUNDE

[Harrie Jorna]

Het moet zo'n zes jaar geleden zijn dat mijn toenmalige collega wiskunde regelmatig bij ons op school 'zijn' boek Moderne Wiskunde zat te bewerken, altijd aan dezelfde computer. Bij Nieuwe Scheikunde waren we toen al begonnen vanuit de context te werken. 'Moeten jullie niet vanuit de context gaan werken?', vroeg ik hem. 'Dat doen we toch allang!', was zijn antwoord. Daar dacht ik een beetje anders over.
Ik had toen niet kunnen bevroeden dat ik drie jaar later de door mij beoogde wiskunde zelf ben gaan ontwikkelen als een project in de nadagen van mijn carrière als leraar scheikunde en anw. Van de inmiddels door mij ontwikkelde serie lesbrieven presenteer ik er één in dit artikel.



foto 1

De visie van Nieuwe Scheikunde

Als je aan Nieuwe Scheikunde coryfeeën als Jan Apotheker en Gerard van Kooten (*zie foto 2*) zou vragen: wat is de visie van Nieuwe Scheikunde, zouden ze óf minstens een kwartier aan het woord zijn, óf – terecht – weigeren antwoord te geven [1].

Laat ik daarom zelf voorzichtig een begin van een antwoord proberen te formuleren. Veel van wat de Nieuwe Scheikunde tot Nieuwe Scheikunde maakt betreft de didactiek, het HOE.
En aangezien wij hier in Nederland geen staatsdidactiek hebben, vinden we veel van deze ontwikkelingen niet terug in de eindexamenprogramma's. De Nieuwe Scheikunde heeft zich vrijelijk *bottom up* kunnen ontwikkelen. Diverse ontwikkelgroepen schreven los van elkaar de mooiste modules (*zie foto 3*) waarin vaak de context centraal stond, leidend tot diverse leerlijnen.



foto 2 Gerard van Kooten over het HOE, het WAT, concepten en samenhang



foto 3

Een brug te ver

Gezien de ondertitel van dit artikel zou men dus kunnen denken dat de door mij ontwikkelde wiskunde ook modulair zou zijn en vanuit centrale contexten. Dat was ik wel van plan. Bijvoorbeeld een module schrijven over het ophalen van huisvuil volgens de meest economische route. Daarin zou ongetwijfeld als concept de grafentheorie uit voortgekomen zijn, met name de (on)mogelijkheid van een Euler-wandeling. Op het huisvuilophaalbedrijf van mijn buurman hadden ze een programma waar ze de route mee konden optimaliseren. Bij andere modules kon je aan andere optimaliseringsprocessen denken. Mooi allemaal. Maar, zeker op dat moment, was ik nog niet voldoende op de hoogte van de mogelijkheden van wiskunde. Het optimaliseringsprogramma van het vuilophaalbedrijf was weinig inzichtelijk. Het zou mooi zijn de leerlingen een dergelijk programma te laten ontwerpen, maar dat vervolgens in een computertaal te verwezenlijken ging en gaat mijn kennis te boven.

Een stapje terug

Toen ik op de middelbare school zat, hadden we vrijwel nooit practicum. Toen

ik na mijn studie scheikunde ging hospiteren, zag ik de leerlingen proeven doen: ik vond het fantastisch en was op slag verkocht voor het onderwijs. In 1972 ging ik als nieuwkomertje meteen meedoen met de CMLS (Commissie Modernisering Leerplan Scheikunde). Ieder stuk theorie werd zoveel mogelijk afgeleid uit een daartoe geschikt experiment. Niet de context stond centraal maar het 'huis der concepten'. De experimenten waren niet uit het dagelijks leven afkomstige werkelijkheden, maar keurig opgepoetste geïsoleerde, geselecteerde en soms gecreëerde stukken werkelijkheid. Met mijn 'Wiskunde met de vingers' ben ik hier ook mee begonnen: proefjes om stukken wiskunde te introduceren. Vandaar de naam 'Wiskunde met de vingers'. Bijvoorbeeld de parabool introduceren door de leerlingen met hun mobieltje een foto te laten maken van een waterstraal uit een schuin omhoog gerichte aqua-dest-spuitbus en aan de foto metingen te verrichten.

Een stapje heen

Ondanks dat stapje terug hebben mijn leerbrieven duidelijk wel een kenmerk van Nieuwe Scheikunde: het op en neer denken van micro naar macro. Ofwel: van concreet naar abstract. Theorie opbouwen aan de hand van een stuk werkelijkheid en steeds die theorie blijven koppelen aan die werkelijkheid. Bijvoorbeeld, en zie de kadertekst op pagina 293, begrippen rond grafieken, verhoudingstabellen, formules e.d. afleiden uit het toevoegen van bruine bonen in een maatcilindertje water en steeds de stand aflezen. Al deze begrippen worden geïntegreerd toegepast en/of afgeleid. De kadertekst is een deel van een lesbrief bestaande uit 93 vragen met 53 concepten [2]. De concepten worden niet expliciet gedefinieerd, maar in hun omgeving geplaatst waardoor ze duidelijk worden. Een moeder gaat haar baby ook niet eerst uitleggen wat pap is voor ze er een lepeltje van geeft. *Natuurlijk leren* heb ik dat genoemd.

Efficiency

'Wat een onstellende hoeveelheid vragen', hoor ik u al denken, 'Dat doe ik veel sneller.' Veel wiskundedocenten laten hun leerlingen oefenen met opgaven tot ze het 'door' hebben. Die overmaat aan oefening gaat hier ontbreken. 'De nadruk op (kern)concepten draagt bij aan diep begrip en moet tevens een bijdrage leveren aan het terugdringen van de overladenheid' las ik een verslag van een SLO-workshop.
Tijdens het ontwikkelen van mijn lesbrieven volgde ik lessen van mijn collega's. Ik heb mij telkens globaal op de hoogte gesteld van de inhoud van betreffend hoofdstuk om een 'Wiskunde met de vingers' erover te maken. Ik heb nooit alle opgaven gemaakt en me nooit op de conventionele wijze op een proefwerk voorbereid. Sterker nog: in de meeste gevallen liet ik mij door het proefwerk volkomen verrassen. Het proefwerk was in generlei wijze gericht op 'Wiskunde met de vingers' en bevatte veel onderliggende vaardigheden wiskunde. Toch haalde ik hele hoge cijfers. Ook voor de proefwerken in de hogere klassen. En dat komt niet door mijn wiskunde van de HBS van 45 jaar geleden: die ben ik vrijwel volledig kwijt en de wiskunde van tegenwoordig is volmaakt anders. Overigens in die tijd 'deed ik maar wat': één van de redenen om het nu zo aan te pakken: veel meer gericht op begrip. Alles bij elkaar een bewijs van de effectiviteit van de aanpak. Tenminste voor mijzelf. Misschien is mijn aanpak alleen geschikt voor volwassenen? Ik heb een groot deel van mijn lesbrieven voor de tweede en derde klassen uitgeprobeerd tijdens zogenoemde plus-uren op onze school. Ik heb daarbij niet de invloed op hun cijfers nagegaan. Ik heb mijn lesbrieven alleen redactioneel aangepast aan de ervaringen tijdens deze lessen. Over het lange termijn-effect twee opmerkingen. Ik bevind mij in de luxe situatie dat leerlingen in de normale wiskundelessen even hard als anders overstelpt worden met oefeningen. In mijn lesbrieven komen zaken alleen terug als ze in de nieuwe context nodig zijn.

Claims

Leerlingen gingen daarin zelfstandig te werk; in eigen tempo. Wellicht zijn daarom de lesbrieven bij uitstek geschikt voor leerlingen die ziek zijn (geweest) of anderszins achter zijn geraakt of meer 'body' nodig hebben. Ook zal het materiaal geschikt zijn als profielwerkstuk of praktische opdracht. Niet alleen als consument (er is ook materiaal voor vwo-6) maar ook als producent voor leerlingen die overwegen wiskundeleraar te worden: zich diepgaand verdiepen in de didactiek van de wiskunde en je verplaatsen in de leerlingen die met het betreffend onderwerp voor het eerst te maken krijgen.
De opbouw (zie weer de kadertekst) is logisch. Er wordt geen enkel klein stapje overgeslagen. De opbouw is niet: steeds moeilijkere voorbeelden aan de hand waarvan de leerlingen zelf hun conceptenframe zouden moeten opbouwen. Maar meestal blijven ze steken in de uitbouw van hun algoritmenrepertoire. In die twee laatste omschrijvingen zit misschien het grootste verschil tussen mijn 'Nieuwe Scheikunde'-aanpak en andere aanpakken. Toen ik op de HBS (het zal de vierde klas zijn geweest) bij een nieuwe leraar een veel lager cijfer kreeg dan ik gewend was en daartegen protesteerde, zei hij: 'Je past niet eens de regeltjes toe.' Ik was verbouwereerd: ik was me er tot dan toe nooit van bewust geweest dat dát de bedoeling was! De opbouw van de lesbrieven is consequent voortbouwend van concept tot concept, steeds terugkoppelend aan die ene praktische situatie. Leerlingen hebben dus dubbel houvast: aan het huis der concepten dat ze aan het bouwen zijn en aan de concrete situatie waarin ze voor het eerst er mee kennis maakten. Zij moeten wel kunnen re-contextualiseren: hun vaardigheden toepassen in andere gebieden. Zij moeten dus naast mijn lesbrieven wel degelijk oefenen, maar niet meer dan een smalle doorsnede door betreffend hoofdstuk. Leerlingen krijgen meer zelfvertrouwen, durven meer hun eigen inzichten inzetten omdat ze voortdurend bezig zijn daarin zelf stappen te zetten. Daarmee kunnen ze de zaken beter onthouden is er minder inslijtingstraining nodig. Ik kan de zaken onmogelijk onthouden als ik ze niet echt begrijp. Maar ja, dat komt vast ook door mijn leeftijd.
De zelfsturendheid wordt ook bevorderd door de tussenkopjes: ze houden een soort richtingwijzers in waar de daaropvolgende vragen over gaan. Leerlingen weten waar ze mee bezig zijn.

Uitproberen en tto

Tja, claims… maak ze maar eens waar.
Ik kan dat allemaal nu wel zo ervaren en nastreven, maar werkt het ook zo? Werkt het ook zo bij leraren die het niet zelf bedacht hebben? Ik zou het heel prettig vinden als er collega's wiskunde zouden zijn die een of meer lesbrieven eens zouden willen uitproberen.
De onderwerpen variëren van de brugklas tot vwo-6 wiskunde B en D. Ik heb het project ook aangemeld bij *Math4all*: het

Vul je voornaam in ______________en je achternaam_______________en je klas______
Wiskunde met je vingers **brugklas** **©H.Jorna**
Hoofdstuk 3 **In de bonen** **Over grafieken**

7. Dit is nog niet de juiste stand van de maatcilinder in de tekening. Je weet nu pas alleen hoe ver je boven de 10 zit. De juiste stand is dus …… mL.

8. Lees nu de tweede maatcilinder op deze manier af. De stand van de tweede maatcilinder op deze manier is …… mL.

9. Vergelijk de resultaten van deze twee methoden van aflezen. Zij komen …… goed met elkaar overeen.

10. De snelste van deze twee manieren is volgens jou de eerste / de tweede.

Met de bonen aan het werk

11. Je krijgt een handjevol bonen. Kies de kleinste vijftien er uit en de grootste tien. Doe de kleinste één voor één in de maatcilinder met de minste hoeveelheid water. Doe de grootste één voor één in de maatcilinder met de grootste hoeveelheid water. (Als je geen bonen hebt, kun je het met een druppelende kraan doen. Bijvoorbeeld een mét en een zonder straalbreker of twee niet even grote kranen.) Lees steeds de standen af. Vul de onderstaande tabel in. Je ziet de **grootheden** zijn *cursief* gedrukt. De **eenheden** staan gewoon rechtop; achter "in".

aantal bonen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
stand leegste maatcilinder in mL																
stand volste maatcilinder in mL																

De gemiddelde boongrootte

12. Bereken de **gemiddelde** boongrootte van de *kleine* bonen. Gebruik daarbij de aflezing van de tiende boon. Deze is … mL.
13. Deze stand komt niet alleen van de tien kleine bonen zelf. Er zat ook al water in namelijk … mL.
14. Dus de tien kleine bonen zelf hadden samen een grootte (een **volume**) van …mL.
15. Om de gemiddelde grootte van één kleine boon te krijgen deel je dit volume door 10. Dus de grootte van één boon is … mL.
16. Je gaat nu de gemiddelde grootte van de kleine bonen bepalen uitgaande van 15 kleine bonen. Het **verschil** tussen de aflezing bij 15 kleine bonen en de beginstand is ….mL.
17. Dat verschil delen door 15 levert ……mL.
18. Doe hetzelfde uitgaande van de eerste vijf kleine bonen: (stand vijfde kleine boon – beginstand) : 5 = …… mL.
19. Je weet hopelijk wat de **haakjes** betekenen. Tussen haakjes moet je het eerst / laatst doen.
20. Kloppen de drie uitkomsten met elkaar? Leg uit. ……
21. Het meest **nauwkeurig** en het meest **betrouwbaar** van deze drie gemiddelden is ….

Een grafiek maken

22. Teken op **roosterpapier** een **verticale as** ofwel **y-as** (zie tekening) en schrijf: *stand* in mL → langs die as.
23. Leg een lege, droge maatcilinder ernaast (een zelfde als die je in gebruik hebt) en neem de **indeling** van de maatstrepen over. Probeer de indelingsstrepen samen te laten vallen met

Pagina 2 (en gedeeltelijk 3 en 1) van de lesbrief Wiskunde met de vingers

is daar in een ontwikkelingsstadium al te vinden (zie *www.math4all.nl* bij Projecten; zie ook [2]).
Verder ben ik van plan alles in het Engels te vertalen. Dan kan het de wereld in en is het geschikt voor tweetalig onderwijs (tto).
Voor het perfectioneren van het Engels zoek ik een ter zake deskundige *native speaker*. Wie kent zo iemand? Ik kom er graag mee in contact.

Noten

[1] E. de Kleijn, F. Seller (ed.) (2010): *Eindrapport van de Stuurgroep Nieuwe Scheikunde 2004-2010*. Enschede: SLO.

[2] Het gehele werkblad is (als Word-bestand) te downloaden via: *www.math4all.nl/WisMetVingers/WV1hvInDeBonen.doc*

Over de auteur
Harrie Jorna is eindredacteur NLT van NVOX, het magazine voor natuurwetenschappen op school. Hij is ook scheikundedocent en ontwikkelt wiskunde aan de locatie Isala van het Almende College te Silvolde.
E-mailadres: *harriejorna@hotmail.com*

Verhoudingstabellen

EEN PROBLEEM OF EEN HULPMIDDEL?

[Frans Ballering]

Omdat ik – ondanks mijn pensionering als vakdidacticus – nog steeds niet ben uitgedacht over het leren van wiskunde door kinderen, blijf ik schrijven. Voor mijn stukjes ben ik geïnspireerd door het grote enthousiasme van wiskundeleraren die het kunnen opbrengen om 's avonds ook nog lessen vakdidactiek bij te wonen.

Struikelblok of hulpmiddel?

Omdat leerlingen nogal eens moeite hebben met het gebruiken van verhoudingstabellen is het voor hen soms eerder een struikelblok dan een middel om het probleem in kaart te brengen. En voor dat laatste is het toch echt bedoeld.
Verhoudingstabellen zijn zo'n twintig jaar geleden in de wiskundeboeken terecht gekomen omdat ze ook in de rekenboeken van de basisschool een rol spelen. In de meeste wiskundeboeken worden ze vooral gebruikt om zo snel mogelijk 'naar 1 te gaan' of om zo snel mogelijk kruiselings vermenigvuldigen te gebruiken.

Voorbeeld

De laatste opgave van paragraaf 8-2
Vergelijken met tabellen uit *Moderne Wiskunde 2 deel B, vmbo KGT*:
In de supermarkt kost snoep € 5,60 per kg.
Bij de drogist kost snoep € 0,87 per 150 gram.
In welke winkel is het snoep naar verhouding het goedkoopst?

Oplossing 1

Supermarkt	gram	1000	1
	euro	5,60	0,0056

Drogist	gram	150	1
	euro	0,87	0,0058

Dus de supermarkt is het goedkoopst.

Oplossing 2

Supermarkt	gram	1000	1500
	euro	5,60	8,40

Drogist	gram	150	1500
	euro	0,87	8,70

Dus de supermarkt is het goedkoopst.

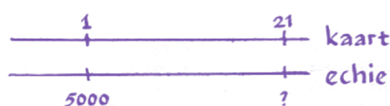
Non-voorbeeld

Ad staat aan het begin van de Spoorlaan voor een stadsplattegrond, met schaal 1 : 5000. De Spoorlaan heeft op de plattegrond een lengte van 21 cm.
a. Ad moet naar een adres aan het einde van de Spoorlaan. Hoeveel meter moet hij lopen? Maak een verhoudingstabel.
b. Als hij flink doorstapt, loopt hij 100 meter per minuut. Hoeveel minuten doet Ad over de wandeling?

Ik vermoed dat minstens de helft van de leerlingen de structuur van dit probleem doorziet en 5000 × 21 cm als antwoord geeft bij a. De andere helft van de leerlingen trek ik over de streep door ze een tekening te laten maken.
De vraag naar de teksten die in de tabel moeten komen, komt meestal eerst (en is meteen ook de moeilijkste vraag). Daarmee zit de tabel de leerling hier behoorlijk in de weg. Niks hulpmiddel.
Een leerling die de structuur van verhoudingsproblemen (nog) niet zo goed overziet, heeft daardoor de grootste moeite met het invullen van woorden als gram en euro op de juiste plaats in de tabel. We moeten dan eerst hulp bieden bij het leren structureren. Zoals altijd moeten we, zodra leerlingen de draad kwijtraken, een stap terug in abstractie. De verhoudingstabel is een geabstraheerde dubbele getallenlijn. Dus gaan we onderzoeken of leerlingen dat model wel kunnen gebruiken.

Dubbele getallenlijn

Ik teken een dubbele getallenlijn waarop de getallen een plaats krijgen (***zie figuur 1***).



figuur 1

Dat is voor ons leraren natuurlijk vrijwel hetzelfde als een verhoudingstabel, maar voor leerlingen? Bij getallenlijnen komen wel eerst de getallen in beeld! Lukt het ons om de leerlingen eerst de dubbele getallenlijn te laten maken dan is de stap naar de verhoudingstabel niet meer zo groot.
De schoolboeken leggen wel erg veel nadruk op correcte teksten. De tabel is toch een hulpmiddel? Natuurlijk moet het antwoord op een goede manier worden gegeven, maar waarom beschouwen we die tabel niet als een kladje?

Minder regels en onderzoeken

Ik zie de verhoudingstabel dus graag met minder regels omgeven; de belangrijkste regels zijn de horizontale en verticale optel- en vermenigvuldigregels die met de dubbele getallenlijn zijn te begrijpen. Daarmee kan de leerling de tabel op zijn manier gebruiken en als dat niet werkt moet er hulp worden geboden. Minder regels heeft hopelijk het effect dat de leerling zich niet afvraagt wat hij moet doen, maar hoe het in elkaar zit.
Een verhoudingstabel is bij uitstek geschikt om eens wat uit te proberen. (De dubbele getallenlijn dus ook.)

Voorbeeld

minuten	1	2	5	10	$\frac{1}{2}$	?
meters	100	200	500	1000	50	1050

Dat uitproberen helpt om de structuur van het probleem te zien. Leerlingen kunnen zelf onderzoeken en vervolgens begrijpen dat er boven 1050 wel $10\frac{1}{2}$ zal moeten komen. Heeft een leerling dit zelf gevonden dan kan hij waarschijnlijk ook begrijpen dat 100 × 10,5 hier een rol speelt, waarmee hij een stap maakt in de richting van meer abstractie.
Bij deze werkwijze kan een leerling zelf beslissen of dit prettig werkt dan wel te lang duurt. Natuurlijk kunnen (moeten?) we bij havo/vwo-leerlingen stappen naar abstractie stimuleren, maar als leerlingen wat minder de rekenmachine gebruiken en wat meer hun hoofd is dat voor mij grote winst. Die winst leidt eerder tot abstractie dan een regel!

Als de verhoudingstabel door leerlingen al zo vaak gebruikt is waarom kunnen ze het dan toch niet? Mogelijk antwoorden op deze moeilijke vraag:

- Ze hebben het zo vaak moeten doen dat het begrip verloren is gegaan. (Zoiets als dat bij oppervlakte altijd meteen *lengte keer breedte* wordt geroepen.)
- Het is te lang geleden dat de dubbele getallenlijn erbij is gehaald.
- Nooit begrepen, alleen braaf het kunstje vertoond.
- Wie zal het zeggen?

Literatuur

- *www.kennisbankwiskunde.nl/*
- F. Ballering e.a. (2008): *Rekenen voor de lerarenopleiding.* Utrecht: APS.

Over de auteur

Frans Ballering heeft zes jaar gewerkt als wiskundeleraar op mavo, havo en vwo en daarna dertig jaar op de tweedegraads lerarenopleiding. Sinds 1 september 2010 is hij met pensioen (fpu).
E-mailadres: *fransballering@hetnet.nl*

50 jaar Pythagoras

[Heiner Wind]

Op zaterdag 2 april j.l. werd het boek *DE PYTHAGORAS CODE* feestelijk gepresenteerd in het Science Center NEMO in Amsterdam, ter gelegenheid van de vijftigste jaargang van het blad *Pythagoras*.



De entourage

Alle omstandigheden voor de organisatie van dit evenement, want zo mag je het wel noemen, waren optimaal. Het was een zonovergoten prachtige lentedag, de locatie was prima gekozen: dit 'museum' staat geheel in het teken van wiskunde. Wie hier nog nooit met een schoolklas op excursie is geweest, heeft wel wat gemist. Vanwege het nationale museumweekend was de toegang gratis; het was dus een gezellige drukte. Een moeder met in haar kielzog vijf jonge kinderen raakte ook verzeild bij de boekpresentatie in de filmzaal, maar kwam na een paar minuten tot de ontdekking, dat ze bij de verkeerde film zaten…

Dat kon niet gezegd worden van de paar honderd andere enthousiaste aanwezigen die genoten hebben van een interessante middag met onder andere een boeiende voordracht van redacteur Matthijs Coster met als titel: Creatief met Pythagoras – terugblik op de prijsvragen.

Jubileumprijsvraag

Elke jaargang lanceert *Pythagoras* een prijsvraag waarvoor interessante prijzen te winnen zijn. Coster is wat dit betreft de specialist van redactie. Dat luistert vrij nauw, legde hij in zijn lezing uit: de ideale prijsvraag heeft makkelijke en moeilijke onderdelen, opdat zowel de onder- als de bovenbouwleerlingen op school er de tanden in kunnen zetten, en er moeten ook een stuk of dertig interessante oplossingen mogelijk zijn, zodat een hele klas mee kan doen en inzenden.

Eén van de meest geslaagde afleveringen was gebaseerd op een eigen uitvinding, de zogeheten 'Coster-getallen':

- 25 is een Coster-getal, want $5 \times 5 - 2 + 2 = 25$;
- 125 is een Coster-getal, want $5 \times 5 \times (2 + 2 + 1) \times 1 = 125$;
- *algemeen*: je moet alle cijfers van het getal precies tweemaal gebruiken om met optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen weer het oorspronkelijke getal te maken.

Met als opdrachten:

- Zoek de Coster-getallen kleiner dan 200.
- Stuur het grootste Coster-getal in.

Uitdagend om mee aan de slag te gaan, en wat dat voor onverwachte gevolgen had, hebben ze op de redactie geweten! Er bleken namelijk oneindig veel Coster-getallen te bestaan, maar voordat enkele inzenders dit hadden aangetoond, is menig pak papier met enorme uitgeschreven Coster-getallen uitgeprint.

Voor de 50e jaargang was het plan om puzzels te maken, waarbij het getal 50 een hoofdrol zou spelen. Coster hierover: 'Het idee was aanvankelijk om in het eerste nummer van het 50-jarig jubileum Hendrik Lenstra (hoogleraar Getaltheorie in Leiden) iets te laten schrijven over het getal 50. Zijn reactie was vrij negatief. 50 is getaltheoretisch gezien geen interessant getal om een heel artikel over te schrijven. Als getaltheoreticus moest ik dat wel beamen. Het zette me wel aan om te gaan nadenken over het getal 50. Er is inderdaad niet zoveel bijzonders te melden over het getal 50, anders dan dat het tweemaal een kwadraat is en bovendien 1 meer dan een kwadraat. Er zijn andere getallen met veel meer interessante aspecten, maar het idee was geboren om het getal 50 te laten terugkeren in de prijsvraag.'

Voor deze jubileumjaargang is de prijsvraag in vijf delen gesplitst – in de eerste vijf nummers telkens een onderdeel dat op een andere manier gerelateerd is aan het getal 50; de oplossingen en winnaars komen in het laatste nummer in juni. Al deze prijsvragen zijn te vinden op: *www.pythagoras.nu/pyth/prijsvraag.php*. Voor de laatste afleveringen is inzenden nog mogelijk.

Eregasten

Bijzonder was de aanwezigheid van een van de oprichters van het blad, de 85-jarige Hans de Rijk, alias Bruno Ernst, die dertig jaar hoofdredacteur geweest is. Hij werd door redacteur Arnout Jaspers terecht in het zonnetje gezet. Jaspers citeerde De Rijk: 'Wiskunde is een weelderige tuin: hoog in de boom zitten wiskundigen, die jaren hebben geploeterd om de toppen te bereiken. Maar beneden op het gras, waar iedereen kan komen, valt ook allerlei moois te plukken.'

Onder applaus nam Hans de Rijk het officiële nulde exemplaar van *De Pythagoras Code* in ontvangst (***zie foto 1***). Het eerste exemplaar werd overhandigd aan de president van de Koninklijke Academie van Wetenschappen prof.dr. Robbert Dijkgraaf, die dankbaar was dat hij ter plekke geen wiskundepuzzels hoefde op te lossen. In een geestige felicitatietoespraak sprak hij zijn waardering en dank uit en wierp de vraag op, of er in de toekomst nu ook een exemplaar met nummer -1 uitgereikt gaat worden.

Werven van abonnees

Pythagoras is een tijdschrift dat zich richt tot alle leerlingen van vwo en havo. Het stelt zich ten doel jongeren kennis te laten maken met de leuke en uitdagende kanten van wiskunde. Iedere liefhebber van wiskunde zou Pythagoras moeten lezen!

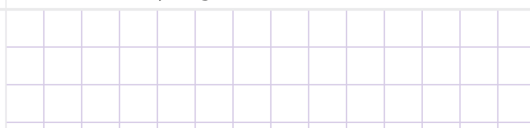




foto 1

De laatste jaren is het aantal abonnees vrij constant, ongeveer 3000. In vroegere jaren zijn dat er zelfs tienduizenden geweest, maar toen waren er alleen maar 'saaie' leerboeken en was er geen concurrentie van mobieltjes, computers en allerlei ander elektronisch speelgoed.
Ook de werving van abonnees ging toen heel anders. We schrijven september 1963, de nieuwe cursus is zojuist begonnen. Onze wiskundeleraar deelt ons mee dat er voor de bèta-leerlingen een heel interessant tijdschrift bestaat, genaamd *Pythagoras* – hij laat tegelijk een voorbeeld zien – 'waarop iedereen zich natuurlijk wil abonneren', gevolgd door: 'Wie dat niet wil, moet nu even de vinger opsteken.' Wij kijken wat weifelend rond, maar niemand steekt een vinger op. De volgende dag melden zich een paar leerlingen af, het thuisfront ging niet akkoord. En als je je niet bij de leraar afmeldde aan het eind van het schooljaar, was je automatisch weer abonnee voor de volgende jaargang. Zo'n methode, die zet zoden aan de dijk.
De redactie van het blad verdient een groot compliment, omdat zij er steeds weer in slaagt interessante en uitdagende artikelen te produceren, ook artikelen die toegankelijk zijn voor leerlingen uit lagere klassen, of, zoals Jaspers het aardig uitdrukte: 'Wiskunde zonder misbruik van voorkennis.'

Frits Bolkestein

Een groot deel van het redactiewerk gaat per e-mail en internet, maar per nummer komt men minstens één keer echt bij elkaar om over de inhoud te brainstormen. Jaspers daarover: 'We hadden vorig jaar een serie over wiskundigen die buiten de universiteit of het onderwijs zijn gaan werken, maar nog wel wiskunde toepassen in hun beroep. We zaten in de Academische Club Amsterdam te praten over geschikte kandidaten. "Wist je dat Frits Bolkestein ooit wiskunde gestudeerd heeft?" zei een van onze redacteuren. "Ik kwam laatst zijn naam ook weer tegen in een stokoud congresverslag, uit 1954." We bespraken hem nog even als kandidaat voor de serie, maar voerden hem af omdat hij nu toch echt wel te oud was; zijn naam zegt de scholieren waarvoor *Pythagoras* primair bedoeld is niets meer, en met wiskunde houdt hij zich al een halve eeuw niet meer bezig. "Interessante man, maar niet op wiskundig gebied," concludeerde ik om het agendapunt af te ronden. Minder dan een minuut later gaat achter mijn rug de deur van de Academische Club open en er stommelt iemand naar binnen. Ik zie de redacteuren tegenover mij ongelovig lachen. Ik draai me om: wie staat daar bij de kapstok zijn jas op te hangen? Frits Bolkestein!'

Het 50-jarig jubileum is voor de redactie geen reden tot zelfgenoegzaamheid, met enthousiasme wordt verder gewerkt en men zou graag in contact komen met mensen, die de redactie zouden kunnen versterken. Hebt u enige ervaring met schrijven en affiniteit met wiskunde(onderwijs) en de popularisering daarvan, aarzelt u dan niet om contact op te nemen met Arnout Jaspers (e-mailadres: *arnout@pythagoras.nu*).

Slotborrel

Na afloop werd aan alle genodigden een exemplaar van *De Pythagoras Code* uitgereikt; de andere gasten konden het ook ter plekke aanschaffen. Het zojuist verworven boek kon je maar beter direct in de tas stoppen, want je blijft er prompt in lezen. Het telt 270 bladzijden met een bloemlezing van de beste artikelen, puzzels en problemen uit de afgelopen vijftig jaar, samengesteld door de redactieleden Alex van den Brandhof, Jan Guichelaar en Arnout Jaspers.
In het café op de begane grond, en zeker ook op het zonnige terras buiten, bleef het nog lang genoeglijk napraten onder het genot van drankjes en hapjes.
Een passende, feestelijke afsluiting van een zeer geslaagde middag.

Over de auteur

Heiner Wind is voorzitter van de redactie van *Euclides* en was docent wiskunde aan het Wessel Gansfortcollege in Groningen tot hij op 1 januari 2008 met FPU ging.
E-mailadres: *hwind@home.nl*



Aankondiging / Wiskundig zomerkamp

Iedere zomervakantie gaat een groep jongeren op kamp om samen lekker te puzzelen en zich te verdiepen in wiskundige onderwerpen, zoals fractals, magische vierkanten en de reeks van Fibonacci. De stichting *Vierkant voor Wiskunde* organiseert deze kampen en wil daarmee laten zien dat wiskunde heel veel leuke en interessante kanten heeft.
Er zijn drie kampen voor verschillende leeftijdsgroepen die alle in Lunteren worden gehouden:

- Kamp A van 8 t/m 12 augustus voor kinderen van groep 6, 7 en 8;
- Kamp B van 15 t/m 19 augustus voor jongeren van klas 1, 2 en 3;
- Kamp C van 1 t/m 5 augustus voor jongeren van klas 4, 5 en 6.

De begeleiding van de kampen is in handen van een groep enthousiaste vrijwilligers, veelal (oud)wiskundestudenten, die het zelf ook leuk vinden om met wiskunde aan de slag te gaan.
Vorige zomer is het Jeugdjournaal langs geweest om een beeld te krijgen van wat er zoals gedaan wordt tijdens een kamp is.
De uitzending te bekijken via *www.vierkantvoorwiskunde.nl*. Daar is ook meer informatie te vinden over de kampen.



'Voetbal' gemaakt met Polydron tijdens een zomerkamp (foto: Ynske Koenders)

Aankondiging / Studiereis voor wiskundedocenten naar Roemenië

Nadat er een tiental jaren zeer succesvolle, en gezellige, studiereizen naar vele landen in Europa zijn gemaakt, komt er nu nog een reis naar Roemenië. Het belangrijkste deel van het programma bestaat uit bezoeken aan scholen en het bijwonen van lessen. Verder gaan we naar het ministerie van onderwijs voor een uitleg over het Roemeense onderwijs, we bezoeken een instituut voor opleiding van wiskundeleraren, en we gaan een dag naar Bulgarije.
Docenten die met vorige reizen mee waren, hebben dit altijd als zeer verfrissend voor hun eigen onderwijs ervaren. Door te kijken naar het onderwijs in een ander land, het praten over de verschillen met je eigen situatie, kom je tot nieuwe ideeën.
De reis vindt plaats van zondag 16 oktober 2011 tot en met 22 oktober (voor een groot deel van Nederland is dat de herfstvakantie). We vliegen met de KLM, en verblijven in een hotel in Boekarest.
Voor een leraar die op een school werkt, wordt subsidie aangevraagd. De eigen bijdrage is dan 600 euro. Menige school vergoedt die uit de nascholingsgelden.

Voor inschrijving en/of een informatiepakket:
Govert Werther, Mansholt-Nes 5, 1862 AD Bergen (NH)
E-mailadres: *govertwerther@gmail.com*



Het Geheugen



[Harm Jan Smid]

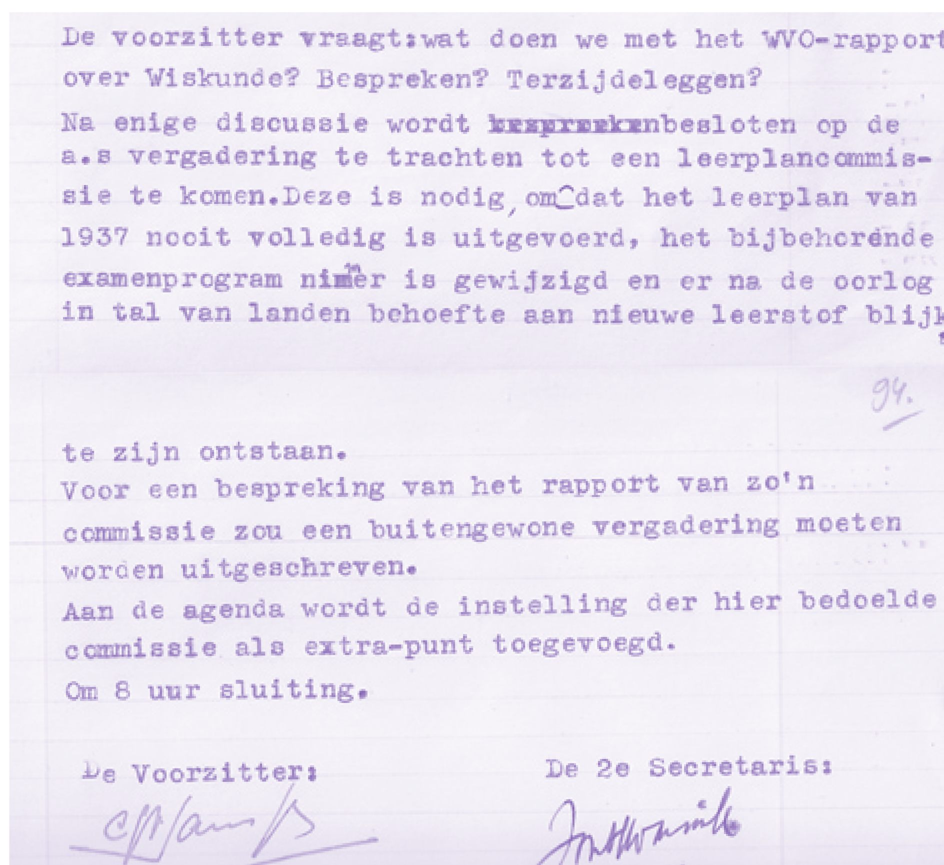
Problemen en discussies die nu het wiskundeonderwijs beheersen, hebben soms parallellen in een ver of niet zo ver verleden. Soms lijkt het of er niets veranderd is, maar vaak is het toch net even anders. In de rubriek 'Het Geheugen' pakt Harm Jan Smid zo'n actueel onderwerp op en speurt naar historisch vergelijkingsmateriaal. Soms leerzaam, bijna altijd relativerend.

De docent en zijn vak

In haar jaarrede 2010 kwam onze voorzitter, Marian Kollenveld, nog eens terug op het motto van het NVvW-bestuur: *Geef de docent zijn vak terug!* Daarmee bedoelde ze onder andere het hebben van invloed op het vaststellen van leerplannen en dergelijke, en om dat te realiseren moet de NVvW 'hoger in de beslisboom' zitten, dat wil zeggen: dichter bij de start van de plannenmakerij. Daar is wat voor te zeggen, maar mij interesseert natuurlijk vooral de historische kant. Het motto suggereert immers dat de docent vroeger wél het vak 'bezat', en dat hij dat op een of andere manier is kwijtgeraakt. Dat roept de allerlei vragen op: wát bezat de docent dan wel precies, en wat deed die docent daar mee, en hoe is hij dat kwijtgeraakt? Veel te veel om allemaal in een rubriek als deze te bespreken, maar ik neem een voorbeeld waarvan je mag vermoeden dat de docent daarbij echt eigenaar van zijn vak was: het *Wimecos*-leerplan dat in 1958 werd ingevoerd.
Het was een leerplan opgesteld door de voorganger van de NVvW, uitgebreid besproken binnen de vereniging, overgenomen door de overheid. Mooier kon het niet. Hoe kwam dat allemaal zo?

Een conservatieve halve eeuw

Het leerplan van 1958 was volgens Johan Wansink 'te beschouwen als de realisatie van wensen die een hele generatie van wiskundeleraren reeds had gekoesterd, en die al een halve eeuw geleden elders, in het buitenland, waren geformuleerd'. Wansink doelt hierbij op de 'Reformbewegung' die in het begin van de twintigste eeuw in Duitsland en andere landen opkwam en in veel landen de leerplannen voor wiskunde beïnvloedde. Hij suggereert eigenlijk dat de wiskundeleraren in Nederland dat ook wel graag gewild zouden hebben, maar ja, om een of andere reden kwam het er niet van. Zouden die wiskundeleraren van toen dan toch geen eigenaar van hun vak geweest zijn? Als ze die modernisering zo graag wilden maar het ze toch niet lukte, stelde dat hele eigendom immers wel erg weinig voor. Er wordt wel beweerd dat de conservatieve inspecteur Jensema alles tegen hield, maar was die dan in zijn eentje de eigenaar van het vak? Ik betwijfel overigens of de meeste wiskundeleraren van die generaties wel die wensen koesterden die Wansink hun toeschrijft.
In 1948 deed L.N.H. Bunt uitgebreid onderzoek naar de opinies van wiskundeleraren, en daaruit bleek dat vooral de HBS-docenten weinig interesse in andere dan de traditionele onderwerpen hadden. Nu waren er natuurlijk heus wel onder hen die wél geïnteresseerd waren in vernieuwing. In het begin van de eeuw deed F.J. Vaes, niet toevallig een ingenieur, pogingen om differentiaal- en integraalrekening in het leerplan voor de HBS opgenomen te krijgen. Zo'n vijf- en twintig jaar later deed E.J. Dijksterhuis opnieuw een poging in die richting, nu overigens uitgaande van een veel meer theoretische benadering. Veel haalde dat allemaal niet uit: Vaes had helemaal geen succes, Dijksterhuis maar zeer ten dele. Een ander element uit de *Reformbewegung*, de modernisering van het meetkundeonderwijs op basis van transformaties, kwam in Nederland helemaal niet aan bod. We kwamen hier niet verder dan discussies over een intuïtieve inleiding in een verder volledig traditioneel programma, waarbij juist Dijksterhuis zich tegen iedere modernisering verzette. Pas eind jaren


De voorzitter vraagt:wat doen we met het WVO-rapport over Wiskunde? Bespreken? Terzijdeleggen?
Na enige discussie wordt ~~besproken~~besloten op de a.s vergadering te trachten tot een leerplancommissie te komen.Deze is nodig, omdat het leerplan van 1937 nooit volledig is uitgevoerd, het bijbehorende examenprogram nimmer is gewijzigd en er na de oorlog in tal van landen behoefte aan nieuwe leerstof blijk

94.

te zijn ontstaan.
Voor een bespreking van het rapport van zo'n commissie zou een buitengewone vergadering moeten worden uitgeschreven.
Aan de agenda wordt de instelling der hier bedoelde commissie als extra-punt toegevoegd.
Om 8 uur sluiting.

De Voorzitter: De 2e Secretaris:

figuur 1 Fragment uit de notulen van het Wimecos-bestuur van 26 november 1953, waarop naar aanleiding van het rapport van de Wiskundewerkgroep (WVO staat voor Werkgroep Vernieuwing Onderwijs) bijna achteloos werd besloten een eigen leerplancommissie in te stellen.

d. De beschrijvende meetkunde.
De Commissie is van oordeel, dat het programma voor de beschrijvende meetkunde de vele uren die aan dit onderdeel besteed moeten worden niet rechtvaardigt. Bovendien is het vak ontaard in een tijdrovende techniek waarvan de wiskundige waarde maar gering is., anderzijds betekent de traditionele Monge-projectie een ongewenste beperking. Daarom wordt voorgesteld de beschrijvende meetkunde te reduceren tot een nadrukkelijk te vermelden onderdeel van de stereometrie, namelijk de beginselen van de schuine parallelprojectie, en de toepassingen te beperken tot prisma's en piramiden in eenvoudige stand.
De Commissie zou het niet verantwoord achten de beschrijvende meetkunde eenvoudig van het H.B.S.-programma af te voeren, omdat het constructieve element in het stereometrie-onderwijs, dat naast het systematische, deductieve element en naast stereometrische berekeningen van zo wezenlijk belang moet worden geacht, daardoor ernstig in gevaar zou komen. Zij acht het van belang dat de leerlingen de figuren uit hun stereometrieboek werkelijk begrijpen, dat ze zelf analoge figuren kunnen maken en in die figuren constructies kunnen uitvoeren. Het is daartoe noodzakelijk uitdrukkelijk stil te staan bij de problemen die het afbeelden van driedimensionale figuren op een plat vlak meebrengt. Hierdoor wordt naar het oordeel van de Commissie een meer waardevolle bijdrage geleverd tot wiskundige vorming dan door de gangbare constructies in Monge-projectie, waarbij grillige standen zo gemakkelijk tot technische complicaties en betreurenswaardig tijdverlies leiden.

figuur 2 Johan Wansink was persoonlijk een voorstander van het vak Beschrijvende Meetkunde, maar het oordeel van de commissie was duidelijk: zonde van de tijd. Van het ‘stilstaan bij de problemen die het afbeelden van driedimensionale figuren op een plat vak met zich meebrengt’ kwam overigens in de praktijk weinig terecht.

vijftig kwamen er serieuze experimenten rond ‘bewegingsmeetkunde’, maar toen was het te laat; klassieke planimetrie in welke vorm dan ook verdween onder de invloed van de *New Math* spoedig daarna uit de scholen. In de eerste helft van de twintigste eeuw stond het wiskundeonderwijs in Nederland stil. Terwijl in veel andere Europese landen interessante vernieuwingen plaatsvonden – natuurlijk niet altijd even succesvol – gebeurde hier nauwelijks iets.

Toch een nieuw programma

De belangrijkste impulsen tot vernieuwing kwamen in die jaren van de WiskundeWerkgroep, onderdeel van de Werkgroep voor Vernieuwing van Onderwijs, een informele club die los stond van de lerarenorganisaties. Er zaten ook wel leraren bij, maar de leidende figuren waren buitenstaanders, zoals Tatiana Ehrenfest-Afanassjewa en na de oorlog Hans Freudenthal. Binnen Wimecos bestond nogal wat weerstand tegen de Werkgroep. Uit de bestuursnotulen van begin jaren vijftig blijkt dat de meeste bestuursleden weinig met de Werkgroep op hadden, en dat men hooguit van het werk van de groep kennis wilde nemen, maar dat van samenwerking geen sprake kon zijn. *Dilettanten* waren het volgens een van de bestuursleden. Sinds 1949 zat echter ook Johan Wansink in het bestuur, die zelf lid was van de Werkgroep en het is boeiend om te lezen hoe hij met tact en beleid langzamerhand een betere verstandhouding tussen het Wimecos-bestuur en de Werkgroep wist te bereiken.

Wimecos had in 1948 voorstellen gedaan om het examenprogramma in overeenstemming te brengen met het leerplan van 1937, maar die voorstellen waren op het ministerie spoorloos verdwenen – niemand wist wat er mee gebeurd was. Liwenagel, de organisatie van wiskundeleraren op gymnasia en lycea, had in 1949 voorstellen voor een nieuw gymnasiumprogramma gedaan. De Werkgroep ontwikkelde daarna plannen voor een nieuw examenprogramma voor HBS en gymnasium samen, en toen die in 1952 op tafel lagen, drong het tot het Wimecos-bestuur door dat ze maar beter zelf initiatieven konden nemen. Het besloot een commissie in te stellen die een nieuw programma moest gaan voorbereiden; ***zie figuur 1 op pag. 299***. De Werkgroep werd niet officieel gevraagd deel te nemen, dat was nog een brug te ver, maar niet alleen Wansink, die voorzitter werd, maar ook Vredenduin, vertegenwoordiger van Liwenagel in de leerplancommissie, was lid van de Werkgroep. Onder leiding van Wansink, een bekwame voorzitter en een man van het redelijk compromis, werd er vlot gewerkt en kwam er spoedig een concept leerplan tot stand, dat heel wat elementen uit het plan van de nog kort daarvoor vermaledijde Werkgroep bevatte.

De democratie in werking

De belangrijkste nieuwe elementen uit het voorstel waren het centraal stellen van het functiebegrip in de algebra, met daarbij een bescheiden introductie in de analyse, en het vervangen van de Beschrijvende Meetkunde door Analytische Meetkunde, een vak dat al tientallen jaren op het programma van het gymnasium stond; ***zie figuur 2***. Daardoor kon er één examenprogramma voor HBS en gymnasium komen, toen een revolutionaire stap vooruit. Verder stonden de complexe getallen en een introductie in de statistiek in het voorstel, maar die onderdelen haalden het uiteindelijk niet uit vrees voor overlading van het programma.
Opvallend is hoe intensief de wiskundeleraren zelf bij de voorstellen betrokken werden. De voorlopige voorstellen werden gepubliceerd en daarop kon gereageerd worden. Dat leverde 19 brieven op, soms van complete wiskundesecties waarvan de leden samen de voorstellen bestudeerd hadden; ***zie figuur 3***. Op 26 februari 1955 werd in hotel Krasnapolsky een buitengewone algemene ledenvergadering van Wimecos gehouden, met 119 aanwezigen. Door 7 leden werden vragen gesteld over het onderbouwprogramma, door 12 leden over het bovenbouwprogramma. Uit het in *Euclides* gepubliceerde verslag blijkt dat al die vragen serieus door het bestuur ter plekke beantwoord werden; ***zie figuur 4***. Al zal heus niet iedereen tevreden zijn geweest, de aanwezige leraren moeten zich toch een beetje eigenaar van hun vak hebben gevoeld.
Het Wimecos-programma was geen lang leven beschoren. Het bracht maar een bescheiden vernieuwing en verdween eind jaren zestig, ten tijde van de Mammoetwet en de *New Math* van tafel. Maar misschien was het proces dat tot het Wimecos-programma leidde wel veel belangrijker dan het product. De samenwerking in de commissie leidde tot één programma voor HBS en gymnasium waardoor de scherpte van het oude onderscheid tussen HBS en gymnasium verdween. Vakken als beschrijvende meetkunde en mechanica, die decennia lang krampachtig verdedigd waren en waarin veel energie was gaan zitten die beter besteed had kunnen worden, werden vaarwel gezegd. Er ontstond een goede relatie met de WiskundeWerkgroep, die zich van zijn kant coöperatief opstelde en het nieuwe programma warm ondersteunde. Eigenlijk was het samenwerken met vernieuwers als Freudenthal toch helemaal zo eng niet! Dat Wimecos zich eind jaren zestig kon omvormen tot de NVvW waarvan alle leraren lid konden worden en een vereniging werd die openstond voor vernieuwing, is in de jaren vijftig voorbereid.



Ondergetekenden,

Mej. A.H.H. Bonekamp,
Drs. A.L.W. Kempen,
Dr. L. Lips,

leraren wiskunde aan het R.K. Lyceum te Alkmaar,
verklaren hij deze, dat zij ernstige bezwaren hebben tegen het geven van onderwijs in toegepaste wiskunde (statistiek).

Het komt hun niet juist voor, aan alle H.B.S.-leerlingen een dergelijk vak te gaan doceren, om voor een klein deel der toekomstige studenten de studie te vergemakkelijken.

Huns inziens is de Stereometrie zwaar genoeg en behoeft dit vak niet nog verzwaard te worden door invoering van scheve parallelprojectie.

Om dezelfde redenen achten zij toevoeging van analytische meetkunde aan het vak goniometrie niet wenselijk.

Zij achten het handhaven van de beschrijvende meetkunde in zijn huidige vorm of eventueel het vervangen van dit vak door eenvoudige analytische meetkunde meer aan te bevelen.

Alkmaar, 10 Februari 1955.

figuur 3 Een van de brieven aan het Wimecos-bestuur naar aanleiding van de voorstellen voor een nieuw leerplan. In het rapport werd de betekenis van het vak statistiek uitvoerig onderbouwd, maar de sectie van deze school was kennelijk niet overtuigd.

Dr. Buzeman meent dat dit niveau kwalitatief, niet kwantitatief moet worden bepaald. Bij stemming blijken er 17 leden voor dit amendement, dat de anal. meetkunde wil beperken tot rechte lijn en cirkel, te zijn. Het is dus verworpen.

Truijens wil een nieuw amendement voorstellen, nl. de opneming van de bundels rechte lijnen en cirkelbundels in het programma voor analytische meetkunde. Het wordt verworpen met 10 stemmen voor.

Zimmerman wil de eenvoudige meetkundige plaatsen in het programma opgenomen hebben. De commissie ontraadt het ter wille van de gewenste beperking. Vóór dit voorstel worden 53 stemmen uitgebracht. Op een nieuwe vraag van de voorzitter blijkt er niemand tegen het amendement-Zimmerman te zijn.

Het amendement van mej. Boekhoff ontvangt geen steun.

De voorzitter merkt nog naar aanleiding van het door dr Streefkerk gesprokene op dat de scheve projectie niet uitdrukkelijk in het programma wordt voorgeschreven, maar wel wordt bedoeld (zie de toelichting in § 9). Daardoor kan later altijd gemakkelijk op een andere projectiemethode, b.v. de klinografische, worden overgegaan.

Tegenover Van der Lecq handhaaft de voorzitter de eis van de commissie constructies niet alleen te beschrijven, maar in een tekening uit te voeren. Hij is ook tegen het opnemen van eenvoudige netwerken, zoals Wasscher voorstelde. De tendens van het eindexamen-gymnasium in deze keurt hij af. Hij wil hierover geen examenopgaven. Alleen het didactisch-nodige op dit gebied is geoorloofd.

figuur 4 Een stukje uit het verslag van de buitengewone ledenvergadering, dat een beeld geeft van de levendige discussies. Na de stemmingen over de amendementen werd het voorstel met slechts 6 stemmen tegen aangenomen.

Het bezit van de zaak...

Wimecos organiseerde nog een keer zo'n massale bijeenkomst waarop over vergaande voorstellen voor nieuwe leerplannen gesproken kon worden. Dat was op 30 oktober 1967, naar aanleiding van de voorlopige plannen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde. Van te voren werden dertien brieven, soms van individuele personen, soms van secties, met meestal uitvoerige commentaren en vragen naar het Wimecos-bestuur gezonden. Honderden leraren woonden de vergadering bij.

Ook dat was geslaagde poging om de docenten bij de nieuwe plannen te betrekken, maar er was een essentieel verschil. Wimecos was niet meer de opsteller van de voorstellen, en het was ook niet meer aan de leden om ze goed- of af te keuren. De CMLW was de eindverantwoordelijke, en de bijeenkomst had het karakter van een veldraadpleging. Men mocht zijn mening geven en die werd heus wel serieus genomen, maar echte zeggenschap, en daarmee verantwoordelijkheid, hadden de leraren niet meer. En daarmee waren ze, en ik denk definitief, een beetje minder eigenaar van hun vak geworden.

Nu waren ze dat natuurlijk ook nooit echt geweest. Ook bij het Wimecos-voorstel van 1955 was het uiteindelijk de overheid die over invoering besliste, en zo hoort het ook. Maar het is ook waar dat die overheid de laatste decennia meer naar de instellingen rondom het onderwijs geluisterd heeft dan naar het onderwijs zelf. Ik denk wel eens dat de NVvW daar ook niet helemaal aan ontkomen is, en het is goed dat het huidige bestuur probeert het vak een beetje aan de docenten terug te geven. Daarvoor is het natuurlijk óók nodig ze een echte inbreng te geven. Het zou mooi zijn als bijeenkomsten van 1955 en 1967, waar de docenten zelf uitgebreid aan bod kwamen, als inspiratie voor dat streven zouden kunnen dienen.

Over de auteur

Harm Jan Smid was lerarenopleider en medewerker wiskunde aan de TU Delft, en promoveerde daar op de geschiedenis van het wiskundeonderwijs in de eerste helft van de negentiende eeuw. Hij is momenteel voorzitter van de Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs (HKRWO).
E-mailadres: *h.j.smid@ipact.nl*

Differentialen en diepvriespizza's



[Dorien Lugt]

[Red.] Heeft u enig idee van het wiskundestudentenleven van tegenwoordig? Is wiskunde studeren nog was het was? Dorien Lugt is sinds augustus 2009 wiskundestudent aan de TU Delft en schrijft voor Euclides over haar belevenissen en observaties vanuit collegezaal en studentenhuis.

Computers waren eng en economie niet boeiend

Het tweede jaar van mijn bachelor loopt bijna ten einde, volgend jaar heb ik nog een minor, een bachelor-eindproject en de twee derdejaars vakken te gaan. Het is gek hoe mijn kijk op wiskunde is veranderd in de loop van de tijd.
Toen ik begon aan deze opleiding, had ik nog mijn twijfels of technische wiskunde wel iets voor mij zou zijn. Ik vond computers eng en had absoluut geen zin om te leren programmeren of werken met Matlab en Maple. Het eerstejaarsvak modelleren vond ik maar vaag, ineens was er niet één goede manier en werden de methodes niet meer fijntjes op het bord voorgedaan. Maar dat veranderde, programmeren bleek een stuk leuker als je er echt zelf mee bezig ging, en Matlab en Maple zijn niet onmogelijk om mee te werken.
Een van de leukste vakken van het afgelopen jaar vond ik beslissingsanalyse. Beslissingsanalyse is een behoorlijk toepassingsgericht vak, waar onder andere regressiemethodes, forecastingsmodellen en belief nets worden behandeld. Iedere twee weken kregen we een opdracht, we analyseerden de situatie en schreven een onderzoeksverslag. Tijdens een mondeling moesten we de gebruikte methoden en conclusies verdedigen. Bij dit vak was het voor het eerst dat ik per ongeluk tot 's nachts drie uur zat te werken aan mijn opdracht, ook al was de deadline niet de volgende dag. Ook het vak optimaliseren, waarbij de simplex methode, lineaire optimalisatie en P- en NP-problemen aan de orde kwamen, was een van de vakken waar ik echt enthousiast mee bezig kon zijn.

Op het moment dat je keuzes maakt, denk je vaak dat je dat doet aan de hand van goede argumenten. Wiskunde was iets voor mij, want ik hield ervan dat het zo abstract is; dat had iets magisch. Nu weet ik dat ik eigenlijk geen idee had van wat deze studie inhoudt. Ik had vanaf de derde klas brochures verzameld alsof ik een papierschaarste verwachtte. Technische geneeskunde, filosofie, Nederlands, civiele techniek, industrieel ontwerpen, psychobiologie, bouwkunde, natuurkunde, sterrenkunde en literatuurwetenschap, het waren ooit allemaal reële opties. Bijna alles leek me leuk, maar één ding wist ik zeker, ik ga nooit iets met economie doen. Ik had het vak economie alleen in de derde klas gehad, maar het leek me absoluut niet interessant. Nu, twee jaar later, moet ik een minor kiezen en denk ik aan econometrie of financiële wiskunde. Wie weet heb ik daar ook een verkeerd beeld van, ik ben benieuwd.

Vanuit de oude doos

A° 1925/26

[Ton Lecluse]

In deze rubriek bespreek ik enkele opgaven die de vorige eeuw – tot in de Tweede Wereldoorlog – in toelatingsexamens voor universiteiten zijn gebruikt. Dit jaar ligt de nadruk op algebra, goniometrie en analytische meetkunde. Ik beperk me tot opgaven die, naar mijn mening, ook door de huidige leerlingen op het vwo gemaakt moeten kunnen worden. Wellicht met enige hulp of als praktische opdracht.

Dit keer twee opgaven waarin de hoeken van een gelijkbenige driehoek moeten worden bepaald. De ene is van het trigonometrische type, de andere is analytisch van aard. En verder een opgave met een stukje algebra.
Wellicht vindt u het leuk om de opgaven eerst zelf te proberen. Misschien vindt u de opgaven wel erg eenvoudig voor uzelf, maar uw leerlingen hebben wellicht een andere mening.
Verderop treft u mijn uitwerking aan.

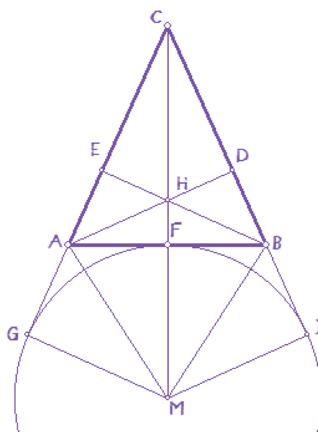
Opgave 1 (1926)
In een gelijkbenige driehoek *ABC* met top *C* is de afstand van het hoogtepunt tot het middelpunt van de aangeschreven cirkel aan de basis gelijk aan de basis. Bereken de hoeken van die driehoek.

Opgave 2 (1926)
Bereken de hoeken van de gelijkbenige driehoek, waarvan de aangeschreven cirkel rakend aan de basis even groot is als de omgeschreven cirkel.

Opgave 3 (1925)
Bepaal een kwadratische vergelijking waarvan de wortels één groter zijn dan de wortels van de vergelijking
$x^2 - (a + 3)x + (2a - 7) = 0$

Opmerking. Het betreft hier (natuurlijk) een vergelijking met onbekende *x*, waarbij *a* een constante is.

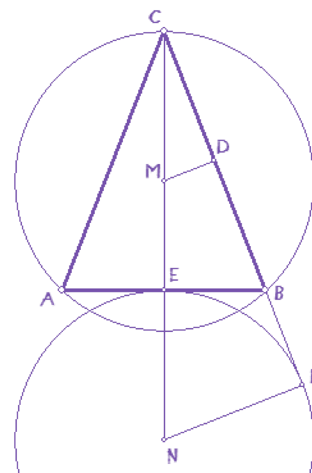
Uitwerkingen
Opgave 1 – ***Zie figuur 1***. Stel $\angle ACB = \gamma$, dan volgt uit de hoekensom van koordenvierhoek *CGMJ* dat $\angle GMJ = 180° - \gamma$.
Omdat deze hoek in vier gelijke delen is gesplitst, is dus $\angle AMF = 45° - \frac{1}{4}\gamma$, dus $\angle MAF = 45° + \frac{1}{4}\gamma$.



figuur 1

De driehoeken *ADB* en *CAF* zijn gelijkvormig, dus $\angle FAH = \frac{1}{2}\gamma$.
Stel $AF = FB = \frac{1}{2}c$, dus $MH = c$. Dan geldt:
$MF = \frac{1}{2}c\tan(45° + \frac{1}{4}\gamma)$ en
$HF = \frac{1}{2}c\tan(\frac{1}{2}\gamma)$
Dus:
$MF + HF = \frac{1}{2}c\tan(45° + \frac{1}{4}\gamma) + \frac{1}{2}c\tan(\frac{1}{2}\gamma) = c$
Opgelost moet dan worden:
$\tan(45° + \frac{1}{4}\gamma) + \tan(\frac{1}{2}\gamma) = 2$
Stel $\frac{1}{4}\gamma = x$, dan wordt dit:
$\tan(45° + x) + \tan(2x) = 2$, hetgeen omgeschreven kan worden tot:
$$\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} + \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = 2$$
Stel $\tan x = p$, dan wordt dit, na wegwerken van de breuken:
$-3p^2 - 4p + 1 = 0$, met positieve wortel
$$p = \frac{-2+\sqrt{7}}{3}$$
Hieruit volgt $\gamma = 48{,}59°$ (of: 48°35'25'')
en zijn de basishoeken van de gegeven driehoek elk gelijk aan 65,7° (of: 65°42'17'').

Opgave 2 – ***In figuur 2*** is gegeven:
$CM = NF = R$.



figuur 2

De driehoeken *CMD*, *CBE* en *CNF* zijn gelijkvormig. Stel $MD = 1$, dan geldt:
$CD = \sqrt{R^2 - 1}$, $BC = 2 \cdot CD = 2\sqrt{R^2 - 1}$
zodat:
$BE = (BF =)\dfrac{2\sqrt{R^2 - 1}}{R}$, $CE = \dfrac{2R^2 - 2}{R}$
en dus:
$$CF = CB + BF = 2\sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{R^2 - 1}}{R}$$
$$= \frac{(2R + 2)\sqrt{R^2 - 1}}{R}$$

We maken een verhoudingstabel bij deze drie gelijkvormige driehoeken:

MD	DC	CM	=	1	$\sqrt{R^2-1}$	R
BE	EC	CB	=	$\frac{2\sqrt{R^2-1}}{R}$	$\frac{2R^2-2}{R}$	$2\sqrt{R^2-1}$
NF	FC	CN	=	R	$\frac{(2R+2)\sqrt{R^2-1}}{R}$	$\frac{2R^2-2}{R}+R$

Waaruit bijvoorbeeld de volgende vergelijking volgt:

$$R\sqrt{R^2-1}=\frac{(2R+2)\sqrt{R^2-1}}{R}$$

Deze kan worden vereenvoudigd tot $R^2 = 2R + 2$. De positieve wortel hiervan is $R = 1 + \sqrt{3}$.

In driehoek CMD geldt dus:

$$\sin\angle CMD=\frac{MD}{MC}=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$$

Zodat $\angle CMD = 21{,}47°$.

De hoeken van driehoek ABC zijn dan:

$\angle C = 42{,}94°$ (of: 42°56'29") en

$\angle A = \angle B = 68{,}53°$ (of: 68°31'45")

Dit is een mooie opgave voor in de klas: gelijkvormigheid, mooie algebra.

Opgave 3 – Het is hier handig om te gebruiken dat bij een kwadratische vergelijking $x^2 + px + q = 0$ voor de wortels x_1 en x_2 geldt:

$x_1 + x_2 = -p$ en $x_1 \cdot x_2 = q$

Voor de *gegeven* vergelijking geldt dan:

$x_1 + x_2 = a + 3$ en $x_1 \cdot x_2 = 2a - 7$

Van de wortels x_1' en x_2' van de *gevraagde* vergelijking is gegeven:

$x_1' = x_1 + 1$ en $x_2' = x_2 + 1$

waaruit direct volgt:

$x_1' + x_2' = x_1 + x_2 + 2 = a + 5$

Ook is:

$$\begin{aligned}2a-7 &= x_1\cdot x_2=(x_1'-1)(x_2'-1)\\ &= x_1'x_2'-(x_1'+x_2')+1\\ &= x_1'x_2'-(a+5)+1\\ &= x_1'x_2'-a-4\end{aligned}$$

Dus is: $x_1'x_2' = 3a-3$.

Een mogelijke vergelijking is dan:

$x^2 - (a + 5)x + (3a - 3) = 0$

Aardig is nog op te merken dat voor elke reële a de *gegeven* vergelijking twee wortels heeft, aangezien de discriminant ervan gelijk is aan $a^2 - 2a + 37$, en die waarde is minimaal gelijk aan 36.

Bron

Dr. Th.G.D. Stoelinga, Dr. M.G. van Tol (1958): *Wiskunde-Opgaven van de toelatingsexamens tot de Universiteiten van 1925 tot en met 1958*. Zwolle: N.V. Uitgeversmaatschappij W.E.J. Tjeenk Willink (8e druk).

Over de auteur

Ton Lecluse is docent wiskunde aan het Vathorst College te Amersfoort.
E-mailadres: *alecluse@casema.nl*

Het WwF steunde een organisatie in India

In 2008 en 2009 heeft het Wereldwiskunde Fonds (WwF) een project in India gesteund met een bedrag van 3500 euro. De Holy Cross Service Society, Tiruchirapally, heeft met het geld software ontwikkeld om wiskunde te leren aan dove kinderen, een wiskundebibliotheek opgezet, wiskundig speel- en leermateriaal gekocht en ontwikkeld, bezoeken mogelijk gemaakt aan centra met expertise op het gebied van de ontwikkeling van wiskundige speel- en leereenheden, consultants betaald die hielpen bij de ontwikkeling van dit materiaal en een tentoonstelling over het leren van wiskunde georganiseerd voor basisschoolleerlingen en hun onderwijzers.

Aanvrager: Prof. Dr. S. Prabakar Immanuel
Organisatie: Holy Cross Service Society Tiruchirapally Tamilnadu, India

De organisatie

De Holy Cross Service Society is een non-profit vrijwilligersorganisatie die zich inzet voor onderwijs aan kinderen die op enigerlei wijze zijn benadeeld, zoals dove en blinde kinderen, maar ook kinderen met leermoeilijkheden en kinderen uit



foto 1 Bibliotheek wiskunde

gemeenschappen die achtergebleven zijn. Waar dat mogelijk is wordt het personeel op reguliere scholen ondersteund in het geven van onderwijs aan deze kinderen. Dove kinderen die niet op reguliere scholen terecht kunnen, krijgen onderwijs op een speciale school die door de organisatie wordt gerund. De organisatie wordt geleid door pedagogen en professionele krachten die helpen om een normaal leven te leiden.

Ze heeft als doel kinderen gelijke kansen te geven op educatieve ontwikkeling.
De organisatie helpt kinderen wiskunde te leren zowel door klassikale interactie als door het ontwikkelen van onderwijs-materiaal inclusief software om wiskunde te leren voor dove kinderen. De Society specialiseert zich in het helpen van kinderen met dyscalculie en brengt onderwijzers van locale scholen grondbeginselen bij van wiskundeonderwijs aan kinderen die moeilijkheden hebben bij het leren van wiskunde.
Het gaat hier over kinderen van 6 tot 14 jaar. Het doel is de leerlingen te voorzien van wiskundige basisvaardigheden, zodat hun interesse voor het leren van wiskunde wordt gewekt en gevoed. In het bijzonder voor kinderen met een hoorgebrek worden speciale pogingen gedaan communicatie-software te ontwikkelen om wiskunde te onderwijzen.

foto 2 Uitleg bij tangram



Onderwijssysteem in India in het algemeen

In India zijn de leermethodes voor het basisonderwijs gebaseerd op stampwerk en uit het hoofd leren; gepromoot door Lord Macaulay. Door dit onderwijssysteem lukt het een groot aantal kinderen niet om wiskunde te leren. Het systeem maakt de educatie van gehandicapte kinderen nog complexer en de meesten van deze kinderen tonen geen enkele motivatie om wiskunde te leren en te begrijpen. Het doel van dit project is hier iets aan te verbeteren.

Het project

Met het geld van het WwF is het volgende gedaan.
- Er is een wiskundebibliotheek opgezet.
- Er is een wiskundelab opgezet met bijna 130 activiteiten en spellen die helpen bij het onderwijzen van wiskunde.
- Er is software ontwikkeld om wiskunde te leren met gebruik van gebarentaal en andere communicatiemanieren voor



foto 3 Projectie wiskundespel



foto 4 Meisjes en computers

dove kinderen. Deze software werd uitgebracht in februari 2009.
- Er zijn trainingen verzorgd voor leraren op de diverse scholen om met deze software om te gaan; leraren kregen ook trainingen in het omgaan met het materiaal van het wiskundelab.
- De medewerkers van de Society zijn drie maanden lang getraind in het prepareren van leermateriaal.
- Op 28 en 29 januari 2009 is een tentoonstelling georganiseerd over het leren van wiskunde, zodat kinderen hiervoor gemotiveerd kunnen worden. Volgens professor Prabakar was de expositie een groot succes. Twee lokale televisiezenders en drie kranten brachten verslag uit van de gebeurtenis. Meer dan 1500 schoolkinderen van 16 scholen bezochten de expositie. 120 kinderen van de stichting lieten de wiskundige concepten zien en gaven uitleg hoe je wiskunde kunt leren door middel van eenvoudige spellen en activiteiten. Meer dan 150 leraren bezochten de expositie en zij discussieerden over manieren waarop je wiskunde voor leerlingen tot een plezier kunt maken.
- Er werden meer dan 1000 foldertjes in de lokale taal gemaakt met informatie voor de ouders.

foto 5 Toespraak bij de tentoonstelling



Dank

Professor Prabakar is het WwF zeer dankbaar omdat het fonds de Society heeft gesteund in het promoten van “Wiskunde leren is een Plezier”. De medewerkers van de stichting hebben in het jaar dat het project werd uitgevoerd, heel veel geleerd over het onderwijzen van wiskunde.

Contact

Contactpersoon WwF in Nederland: *Juliëtte Feitsma*
E-mailadres: *juliettefeitsma@kpnplanet.nl*
Website: *www.nvvw.nl/page.php?id=1813*

Een uitbreiding van de rij van Fibonacci

[Jan Kroesen]

In dit artikel wordt een rechtstreekse afleiding gegeven van een formule voor een uitbreiding van de Fibonacci-rij en daarmee ook van de klassieke vorm ervan.

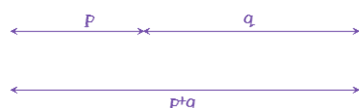
De rij van Fibonacci

Eerst enige zaken met betrekking tot de rij van Fibonacci, hierna aangeduid als F-rij. De F-rij is, zoals genoegzaam bekend, een rij $a_0, a_1, a_2, \ldots$ met als begintermen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ en als kenmerkend voorschrift $a_{n+1} = a_{n-1} + a_n$.
Dit resulteert in de rij:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …
Het is ook een bekend feit dat de verhouding tussen twee opvolgende termen van die rij nadert naar een getal dat verband houdt met het guldensnede-getal.
Zo geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{5}+1) = \Phi \approx 1{,}618 \text{ en}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \varphi \approx 0{,}618$$

Deze getallen Φ (Phi) en φ (phi) zijn zoals u weet onafhankelijk van beide begintermen, en er geldt:
$\Phi \cdot \varphi = 1$
Meetkundig gezien (***zie figuur 1***) krijgt men deze getallen door een lijnstuk zodanig te verdelen in twee delen waarvan de kleinste (p) zich verhoudt tot het grootste (q) als het grootste (q) tot het gehele lijnstuk ($p + q$), de zogenoemde *middelevenredige*; in formulevorm $p : q = q : (p + q)$.



figuur 1

De constructie die deze getallen meetkundig illustreert, laat ik hier achterwege. Later wordt hieraan aandacht besteed en meer algemeen gemaakt.
Iets minder bekend is dat een algemene formule voor de n-de term van de F-rij (de zogenoemde formule van Binet) luidt:

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - (-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\text{Phi}^n - (-1)^n\cdot\text{phi}^n}{\text{Phi}+\text{phi}}$$

In het algemeen bewijst men dit door gebruik te maken van volledige inductie.

Dat kan, maar er is (en dat is minder bekend) ook een rechtstreeks bewijs van deze formule. Dat bewijs wordt hieronder gegeven maar in een algemenere vorm, namelijk bij een *uitbreiding* van de F-rij.

Een uitbreiding van de rij van Fibonacci

De bedoelde uitbreiding – hier verder aangeduid als E-rij – wordt als volgt vastgelegd.
Definitie. Een E-rij is een rij met getallen a_n (n geheel en ≥ 0) waarbij $a_0 = a$ en $a_1 = b$ en $a_{n+1} = k \cdot a_{n-1} + l \cdot a_n$
waarin a, b, k, l willekeurige reële getallen zijn en $k, l > 0$.
Voorbeeld. Is $a_0 = a = -1$ en $a_1 = b = 5$, $k = 3$ en $l = 2$, dan krijgen we: -1, 5, 7, 29, 79, 245, …
De 'gewone' F-rij krijgt men met $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $k = 1$ en $l = 1$: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …

Vooruitblik

De auteur vond het verrassend dat ook bij de E-rij de verhouding tussen twee opvolgende termen nadert naar een waarde, en dat ook die waarde onafhankelijk is van de twee begintermen. Die verhouding, die we hierna Ψ (Psi) zullen noemen, is slechts afhankelijk van k en l. We zullen natuurlijk aantonen dat Ψ bestaat. Daarnaast zullen we een algemene formule voor de algemene term van de E-rij afleiden en een en ander meetkundig bekijken.

De algemene formule

Teneinde een algemene formule af te leiden schrijven we het voorschrift voor de E-rij in matrixvorm:

$a_0 = a$, $a_1 = b$ en $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$

Uitgewerkt geeft dit laatste:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ k\cdot a_{n-1} + l\cdot a_n \end{pmatrix}$$

Dus inderdaad is $a_{n+1} = k \cdot a_{n-1} + l \cdot a_n$. En de lezer zal kunnen verifiëren dat de E-rij hiermee adequaat beschreven is.

De matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}$ noemen we G. Ons doel is dan te laten zien dat:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = G^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

en hiermee a_n te bepalen.
Berekening – We gaan G schrijven als

$G = Q \cdot P \cdot Q^{-1}$ met $P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, waarbij

p en q de eigenwaarden zijn van G.
Daarmee geldt:

$$G^n = (Q\cdot P\cdot Q^{-1})^n = Q\cdot P^n\cdot Q^{-1} = Q\cdot\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & q^n \end{pmatrix}\cdot Q^{-1}$$

Om dat te bereiken moeten we de eigenwaarden en de eigenvectoren van de matrix G berekenen. Allereerst de **eigenwaarden**. Hiervoor moeten we gebruik maken van de determinant:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ k & l-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k & l-\lambda \end{vmatrix}$$

Als we deze determinant gelijk stellen aan 0, kunnen we de eigenwaarden berekenen:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ k & l-\lambda \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow\ -\lambda(l-\lambda) - k = 0$$

Of:
$\lambda^2 - l \cdot \lambda - k = 0$
De oplossingen van deze laatste vergelijking zijn de eigenwaarden van G:
$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2})$, $\lambda_2 = \tfrac{1}{2}(l - \sqrt{4k + l^2})$
Nu de **eigenvectoren**. Omdat voor de ene

eigenvector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ geldt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ kx + ly \end{pmatrix}$$

is $\lambda_1 \cdot x = y$. De bijbehorende eigenvector is dan $\begin{pmatrix} x \\ \lambda_1 x \end{pmatrix}$ of ook $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}$. Analoog is de andere eigenvector $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Hiermee is de matrix Q bepaald, namelijk

$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, waarna we ook Q^{-1} kunnen berekenen:

$$Q^{-1} = \frac{1}{\det(Q)}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$G = Q\cdot P\cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$



Hiermee vinden we voor G^n:

$$G^n = Q \cdot P^n \cdot Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

zodat:

$$G^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Uitgewerkt:

$$G^n \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 a - b \\ -\lambda_2 a + b \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^n(\lambda_2 a - b) \\ \lambda_2^n(-\lambda_1 a + b) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n(\lambda_2 a - b) + \lambda_2^n(-\lambda_1 a + b) \\ \lambda_1^{n+1}(\lambda_2 a - b) + \lambda_2^{n+1}(-\lambda_1 a + b) \end{pmatrix}$$

Daaruit volgt:

$$a_n = \frac{\lambda_1^n(-\lambda_2 a + b) + \lambda_2^n(\lambda_1 a - b)}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Resultaat 1 – Een algemene formule voor de *n*-de term van de E-rij is :

$$a_n = \frac{\lambda_1^n((-\lambda_2)a + b) + (-1)^n(-\lambda_2)^n(\lambda_1 a - b)}{\lambda_1 + (-\lambda_2)}$$

waarbij λ_1 en λ_2 de eigenwaarden zijn van de matrix *G*.

Opmerking. De 'overstap' van λ_2 naar $(-\lambda_2)$ is vanwege het feit dat $-\lambda_2 > 0$, wat we zo meteen gebruiken.

Verhouding

Vervolgens gaan we onderzoeken of de verhouding van twee opvolgende termen van de E-rij nadert naar een waarde.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda_1^{n+1}(-\lambda_2 a + b) + (-1)^{n+1}(-\lambda_2)^{n+1}(\lambda_1 a - b)}{\lambda_1^n(-\lambda_2 a + b) + (-1)^n(-\lambda_2)^n(\lambda_1 a - b)}$$

$$= \frac{\lambda_1(-\lambda_2 a + b) - \lambda_2 \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n (\lambda_1 a - b)}{(-\lambda_2 a + b) + \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n (\lambda_1 a - b)}$$

Nu is:

$$\frac{-\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\frac{1}{2}(-l + \sqrt{4k + l^2})}{\frac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2})} = \frac{-l + \sqrt{4k + l^2}}{l + \sqrt{4k + l^2}}$$

en omdat $l > 0$ is, is daarmee $0 < \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} < 1$.
En dat betekent dat:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n = 0$$

en dus is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\lambda_1(-\lambda_2 a + b)}{-\lambda_2 a + b} = \lambda_1 = \tfrac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2})$$

Met andere woorden, de verhouding van twee opvolgende termen van de E-rij nadert naar de eigenwaarde λ_1, die we vanaf nu dus Ψ (Psi) zullen noemen.

Resultaat 2 – De verhouding van twee opvolgende termen nadert naar een waarde die slechts van *k* en *l* afhangt en wel op de volgende wijze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_1 = \tfrac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2}) = \Psi \text{ (Psi)}$$

Resultaat 3 – Als we ook λ_2 een andere naam geven, namelijk $-\lambda_2 = \psi$ (psi), dan kunnen we de *n*-de term a_n van de E-rij als volgt weergeven.

Met $a_0 = a$, $a_1 = b$ en $a_{n+1} = k \cdot a_{n-1} + l \cdot a_n$ waarbij *a*, *b*, *k*, *l* willekeurige reële getallen zijn en $k, l > 0$, is:

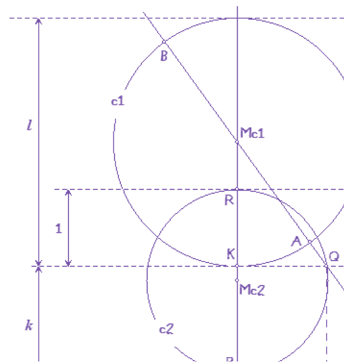
$$a_n = \frac{\text{Psi}^n \cdot (\text{psi} \cdot a + b) + (-1)^n \cdot \text{psi}^n \cdot (\text{Psi} \cdot a - b)}{\text{Psi} + \text{psi}}$$

met $\text{Psi} = \lambda_1 = \frac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2})$ en

$\text{psi} = -\lambda_2 = \frac{1}{2}(-l + \sqrt{4k + l^2})$

Een constructie

Tot slot zullen we zowel Psi als psi meetkundig illustreren door middel van een constructie; ***zie figuur 2***.



figuur 2

De constructie verloopt als volgt.

1. Teken cirkel c1 met straal ½*l* en middelpunt M_{c1}.
2. Trek raaklijn *r* in een punt *K* van deze cirkel.
3. Trek de lijn KM_{c1}.
4. Bepaal punt *R* op deze lijn met *RK* = 1 en punt *P* met *KP* = *k*.
5. Trek cirkel c2 met middellijn *PR* = *k* + 1.
6. De lijn *r* snijdt c2 in punt *Q* (*KQ* is nu gelijk aan √*k*).
7. Trek de lijn QM_{c1} die c1 snijdt in de punten *A* en *B*.
8. Nu is *QB* = Psi en *QA* = psi.

Hieronder volgt een bewijs dat deze constructie juist is.

$RK = k - 1$

$KM_{c2} = straal(c2) = \frac{1}{2}(k+1) - 1 = \frac{1}{2}(k-1)$

$KQ^2 = (QM_{c2})^2 - (KM_{c2})^2 = \frac{1}{4}(k+1)^2 - \frac{1}{4}(k-1)^2 = k$

Dus: $KQ = \sqrt{k}$

$(QM_{c1})^2 = (KM_{c1})^2 + KQ^2 = \frac{1}{4}l^2 + (\sqrt{k})^2 = \frac{1}{4}l^2 + k$

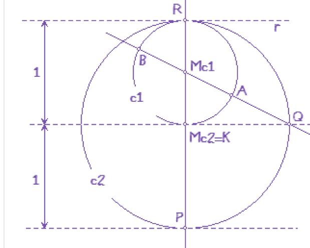
Dus:

$QB = \sqrt{\frac{1}{4}l^2 + k} + \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\sqrt{l^2 + 4k} + \frac{1}{2}l$

en: $= \frac{1}{2}(l + \sqrt{4k + l^2}) = \Psi$ (Psi)

$QA = QB - l = \frac{1}{2}\sqrt{4k + l^2} + \frac{1}{2}l - l$

$= \frac{1}{2}(-l + \sqrt{4k + l^2}) = \psi$ (psi)



figuur 3

Nog een paar opmerkingen

1. In de situatie van ***figuur 2*** is $k < l$ en ½$l > 1$. Ook in het geval dat hieraan niet voldaan is, geldt bovenstaande beschrijving van de constructie onverkort. De lezer zal dit ongetwijfeld kunnen verifiëren. Essentieel hierbij is dat er steeds een tweetal punten *A* en *B* bestaat vanwege het feit dat het punt *Q* – ook bij de keuze van andere waarden van *k* en *l* – buiten cirkel *c2* zal komen te liggen.
2. Omdat $QA \cdot QB = QK^2$ is $QA : QK = QK : QB$, en is dus *QK* middelevenredig tussen *QA* en *QB*.
3. *KQ* is middelevenredig tussen *KR* en *KP* (*KR* = 1 en *KP* = *k*), want *KR* : *KQ* = *KQ* : *KP*.
4. In het geval dat $a = 0$, $b = 1$, $k = l = 1$, waarbij we de F-rij krijgen, gaat bovenstaande constructie over in de constructie die vaak gegeven wordt voor het construeren van de gulden snede; ***zie figuur 3***.[1]
5. Als we Ψ (Psi) willen benaderen met een rij dan kan dat ook door de recurrente betrekking $u_n = l + \frac{k}{u_n}$.
6. Een kettingbreuk is er natuurlijk ook:
$\text{Psi} = l + \cfrac{k}{l + \cfrac{k}{l + \ldots}}$.

Noot (red.)

[1] Deze figuur is door de redactie aan het artikel toegevoegd. Daarin is *QA* = φ en *QB* = Φ.

Over de auteur

Jan Kroesen is wiskundedocent aan het Pontes Pieter Zeeman te Zierikzee.
E-mailadres: *j.kroesen@sylconiamail.nl*



Toeval(lig)

IN 'DIE WURZEL'

[Dick Klingens]

Dobbelen

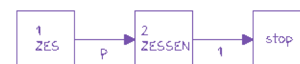
In een alweer enkele jaren geleden verschenen nummer van *Euclides* [1] behandelde ik de verwachting van de kansvariabele X_1 = 'aantal keer dat met een (zuivere) dobbelsteen moet worden geworpen tot de 6 valt'.
Op twee manieren (eenvoudig en wat ingewikkelder, maar voor vwo-leerlingen zeker begrijpelijk) bleek dat:
$E_1 = E(X_1) = 6$
Aan het einde van dat artikel schreef ik: 'Is het een gemiste kans als we iets dergelijks *niet* in onze vwo-klassen behandelen?' En dat 'iets dergelijks' sloeg op de tweede manier: het berekenen van de verwachting van een kansvariabele bij een 'oneindige' kansverdeling.

Welnu, toen ik aan het begin van mijn laatste volledige cursusjaar (2008/2009) onverwacht een extra les in 5-vwo (wiskunde D) moest geven, greep ik terug op dat artikel (een enkele oude jaargang van *Euclides* lag op mijn school onder handbereik) en gaf ik aan de hand daarvan een 'college-les', waarbij interactie van leerlingen natuurlijk was toegestaan. En prompt kwam de vraag: 'En wat is dan de verwachting als je *twee* keer een 6 wilt gooien?'
Met andere woorden: hoe groot is $E_2 = E(X_2)$ als X_2 = 'aantal keer werpen tot twee maal achterelkaar een 6 valt' ?
Gelukkig was het lesuur bijna voorbij, want een antwoord op die vraag had ik niet direct paraat. Tot het einde van die les 'stoeiden' we met:

A. Eerst maar eens de eerste 6 gooien; dat vraagt gemiddeld 6 worpen.
B. Vervolgens proberen we weer een 6 te gooien; dan liggen er twee, met kans $\frac{1}{6}$ op de laatste.
C. Maar er is een grotere kans (namelijk $\frac{5}{6}$) dat B mislukt, en dan moeten we 'helemaal opnieuw beginnen'…

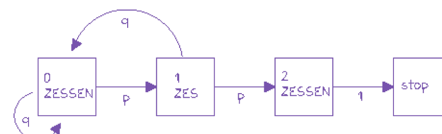
Er werd nog geopperd dat:
$E_2 = E(X_1) + E(X_1) = 12$
maar die suggestie werd onmiddellijk verworpen: 'Dan houd je geen rekening met C, joh!'

Eenmaal thuis zette ik me opnieuw aan het probleem – de leerlingen hebben immers recht op een antwoord, en ik ook.
Nadat het opstellen van een kansverdeling tot een *voor mij* onoplosbaar resultaat leidde (zie ook verderop in dit artikel), ontstonden de volgende twee schema's [2], waarin ik bij de 'kanspijlen' de letter p gebruik voor de kans op het werpen van een 6 en de letter q voor de kans op het werpen van *geen*-6.
Eerst B na A (zie boven):



figuur 1

en dan met gebruik van C:



figuur 2

Mogelijk herkent de lezer hierin zogenoemde *Markov-ketens* (naar Andrej Markov, 1856-1922, Rusland).
Op basis van deze schema's kunnen we een berekening uitvoeren, waarbij het natuurlijk vooral gaat om de stappen B en C.
Ik geef met E_{et} de verwachting (een 'deelverwachting') aan van het aantal worpen om van *één* 6 op *twee* 6-en te komen (B na A). Dan is – met E_2 als nog te berekenen waarde:
(1)… $E_{et} = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot(1+E_2) = 1 + \frac{5}{6}E_2$
Immers, de kans dat we één worp nodig hebben, is $\frac{1}{6}$, en de kans $\frac{5}{6}$ brengt ons, met één worp meer, opnieuw naar de uitgangs-positie, waarin het verwachte aantal worpen dan $(1 + E_2)$ is.
Analoog is (zie weer het volledige schema hierboven):
(2)…
$$E_2 = \frac{1}{6}\cdot(1+E_{et}) + \frac{5}{6}\cdot(1+E_2)$$
$$= 1 + \frac{1}{6}E_{et} + \frac{5}{6}E_2$$
Substitutie van (1) in (2) geeft:
$$E_2 = 1 + \frac{1}{6}\cdot(1+\frac{5}{6}E_2) + \frac{30}{36}E_2 = \frac{7}{6} + \frac{35}{36}E_2$$
Zodat $\frac{1}{36}E_2 = \frac{7}{6}$, en dus is:
$E_2 = 42$

Even terug

Kijken we op bovenstaande manier ook naar de berekening van E_1, dan vinden we met het schema:

0 ZESSEN → p → 1 ZES → 1 → stop (q: terug naar 0 ZESSEN)

figuur 3

direct dat:

$E_1 = \frac{1}{6}\cdot 1 + \frac{5}{6}\cdot(1+E_1) = 1 + \frac{5}{6}E_1$

Dus: $E_1 = 6$.

Naast de beide in [1] vermelde is dit een derde methode waarmee E_1 te berekenen is!

Toevallig!

Is het toeval dat in de in juni 2009 verschenen aflevering van het Duitse wiskundetijdschrift *Die Wurzel* een artikel [3] staat waarin de wijze van behandelen van hetzelfde probleem deels veel overeenkomst (tot de plaatjes aan toe!) vertoont met mijn oplossing? Overigens, dat artikel was voor mij aanleiding tot het schrijven van het onderhavige. Ik geef er in hetgeen volgt geen vertaling van. Ik volg de tekst min of meer op de voet en vermeld alleen, in mijn eigen bewoordingen, de belangrijkste resultaten.

De auteur, Peter Gallin (Zürich, Schweiz), begint *niet* met Markov-ketens, maar kiest eerst (zoals de theorie het ook onze leerlingen voorschrijft) de weg via een, uiteraard ook 'oneindige', kansverdeling, met k gelijk aan het aantal worpen:

k =	2	3	4	…
$P(X_2 = k)$ =	1/36	…	…	…

En hij gebruikt daarbij een kansboom, die ik ***in figuur 4*** en ***figuur 5*** voor de duidelijkheid gesplitst weergeef.

figuur 4 Kansbomen voor k = 2, 3, 4

figuur 5 Kansboom voor k = 5

Zodat, met $p = \frac{1}{6}$ en $q = \frac{5}{6}$:

$k = 2$: $P(X_2 = k) = p \cdot p = p^2$
$k = 3$: $P(X_2 = k) = q \cdot p \cdot p = p^2 q$
$k = 4$: $P(X_2 = k) = p \cdot q \cdot p \cdot p + q \cdot q \cdot p \cdot p = p^3 q + p^2 q^2$
… …

En daarmee is:

$$E_2 = E(X_2) = 2\cdot p^2 + 3\cdot p^2 q + 4\cdot(p^3 q + p^2 q^2) + 5\cdot(\ldots) + \ldots$$

Maar kunnen we deze oneindige som gemakkelijk berekenen?

Natuurlijk bevat *elke* term in E_2 de factor p^2; immers, een succesvolle serie worpen eindigt met twee 6-en (met kans p^2).

Dus:

$$E_2 = p^2 \cdot \left(2 + 3q + 4(pq + q^2) + \ldots\right)$$

Ik schrijf nu de 'kansveelterm' die hoort bij elk (k – 2)-tal worpen dat aan een (succesvol) beëindigd k-tal worpen voorafgaat, als V_{k-2}.

Dan is:

$$E_2 = p^2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \left(k \cdot V_{k-2}\right)$$

waarbij we al gezien hebben dat:

$V_0 = 1$, $V_1 = q$, $V_2 = pq + q^2$

We merken verder op dat elke serie worpen van V_j ($j = k - 2 = 0, 1, \ldots$), wellicht met uitzondering van V_0, eindigt met een worp *geen*-6 (want anders was die serie eerder beëindigd).

Lees verder op pag. 312.

Gallin laat vervolgens zien dat elke veelterm V_j eenvoudig, maar *recursief*, uit V_{j-1} en V_{j-2} kan worden afgeleid.
Een en ander houdt voor V_3 in dat V_2 slechts gevolgd kan worden door een *geen*-6 worp. V_1 kan dan alleen nog maar gevolgd worden door een worp 6 met daarna een worp *geen*-6. Andere mogelijkheden zijn er niet! En eenzelfde redenering gaat ook op voor alle andere V's.
Zodat:

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2 \cdot q + V_1 \cdot pq \\ &= (pq+q^2)\cdot q + q\cdot pq = 2pq^2 + q^3 \end{aligned}$$

en:

$$\begin{aligned} V_4 &= V_3 \cdot q + V_2 \cdot pq \\ &= (2pq^2+q^3)\cdot q + (pq+q^2)\cdot pq \\ &= p^2q^2 + 3pq^3 + q^4 \end{aligned}$$

Algemeen geldt dan (voor $j \geq 2$):

$$V_j = V_{j-1}\cdot q + V_{j-2}\cdot pq$$

Maar daarmee is het sommatieprobleem geenszins opgelost!

Gallin doet vervolgens een geslaagde poging de coëfficiënten in de kansveeltermen in verband te brengen met de binomiaalco-efficiënten in de *driehoek van Pascal*; niet vreemd, want alle termen van een V_k zijn binomiaal in p en q en van de k-de graad.
In figuur 6 staan de kansveeltermen V_0 tot en met V_6; daarin is de driehoek van Pascal schuinweg herkenbaar.
Hieruit blijkt dat:

$$V_k = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} p^i q^{k-i}$$

waarin $\lfloor a \rfloor$ staat voor het grootste gehele getal dat kleiner is dan of gelijk is aan (het reële getal) a.
Dan is (en merk op dat, ter vereenvoudiging van de schrijfwijze van de exponenten, de sommatie nu begint met $k = 0$):

$$E_2 = p^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \cdot \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k-i}{i} p^i q^{k-i}$$

Maar ook deze formule geeft *geen* eenvoudige berekening[4] van de waarde van E_2!

$V_0 = 1$
$V_1 = 1 \cdot q$
$V_2 = 1 \cdot pq + 1 \cdot q^2$
$V_3 = 2 \cdot pq^2 + 1 \cdot q^3$
$V_4 = 1 \cdot p^2q^2 + 3 \cdot pq^3 + 1 \cdot q^4$
$V_5 = 3 \cdot p^2q^3 + 4 \cdot pq^4 + 1 \cdot q^5$
$V_6 = 1 \cdot p^3q^3 + 6 \cdot p^2q^4 + 5 \cdot pq^5 + 1 \cdot q^6$

figuur 6 Kansveeltermen V_0, ..., V_6

Drie zessen
Om te laten zien dat het probleem *echt* ingewikkeld is, met gebruik van kansveeltermen althans, wordt in het artikel ook de berekening van E_3 eerst dáármee aangepakt.
De lezer kan, mijns inziens, het proces zoals dat hierboven met behulp van een kansboom is weergegeven voor E_2, gemakkelijk zelf uitbreiden.
Dit leidt voor de kansveeltermen V_j van E_3 tot de recursieve formule (met $j \geq 3$):

$$V_j = V_{j-1}\cdot q + V_{j-2}\cdot pq + V_{j-3}\cdot p^2 q$$

En dan vinden we voor E_3 (ook hier begint de sommatie met $k = 0$):

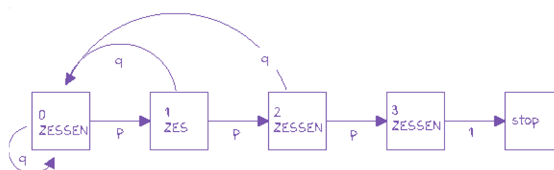
$$\begin{aligned} E_3 &= 3\cdot p^3 + 4\cdot qp^3 + 5\cdot(pqp^3 + q^2p^3) + \\ &\qquad + 6\cdot(p^2qp^3 + qpqp^3 + pq^2p^3 + q^3p^3) + \ldots \\ &= p^3\cdot(3 + 4q + 5(pq+q^2) + 6(p^2q + 2pq^2 + q^3) + \ldots) \\ &= p^3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+3)\cdot V_k \end{aligned}$$

Ik waag me maar niet aan herschrijven van de kansveeltermen via een coëfficiënten-schema, zoals Gallin wél doet, omdat het er dan niet eenvoudiger op wordt: Gallin komt uiteindelijk met gebruik van *trinomiaal*coëfficiënten uit op een (bijna) niet te lezen formule.[5]
Dat het met een Markov-keten heel wat eenvoudiger is, zien we zo direct. De keten voor E_3 (***zie figuur 7***) verschilt niet veel van die voor E_1 en E_2.
De hierbij te gebruiken deelverwachtingen geef ik aan met E_{td} (van *twee* 6-en naar *drie* 6-en) en met E_{ed} (van *één* 6 naar *drie* 6-en).
Dan is:

$$E_{td} = \tfrac{1}{6}\cdot 1 + \tfrac{5}{6}\cdot(1+E_3) = 1 + \tfrac{5}{6}E_3$$

en:

$$\begin{aligned} E_{ed} &= \tfrac{5}{6}\cdot(1+E_3) + \tfrac{1}{6}\cdot(1+E_{td}) \\ &= 1 + \tfrac{5}{6}E_3 + \tfrac{1}{6}E_{td} \end{aligned}$$



figuur 7 Markov-keten voor E_3

Voor E_{ed} volgt uit deze twee betrekkingen:

$$E_{ed} = 1 + \tfrac{5}{6}E_3 + \tfrac{1}{6}\cdot(1 + \tfrac{5}{6}E_3) = \tfrac{7}{6} + \tfrac{35}{36}E_3$$

Voor E_3 zelf geldt:

$$\begin{aligned} E_3 &= \tfrac{5}{6}\cdot(1+E_3) + \tfrac{1}{6}\cdot(1+E_{ed}) \\ &= 1 + \tfrac{5}{6}E_3 + \tfrac{1}{6}E_{ed} \end{aligned}$$

En dit leidt, samen met de laatste uitdrukking voor E_{ed}, tot:

$$E_3 = 1 + \tfrac{5}{6}E_3 + \tfrac{1}{6}\cdot(\tfrac{7}{6} + \tfrac{35}{36}E_3) = \tfrac{43}{36} + \tfrac{215}{216}E_3$$

Zodat, via $\tfrac{1}{216}E_3 = \tfrac{43}{36}$, blijkt dat:
$E_3 = 258$

Algemeen: $E_n = E(X_n)$
In de laatste paragraaf van zijn artikel geeft Gallin nog een aanzet voor het berekenen van E_4. De uit de bijbehorende Markov-keten af te leiden vergelijkingen zijn (en de lezer merke hier op, zo hij dat al niet eerder deed, dat ze sterke gelijkenis vertonen):

$$\begin{aligned} E_{dv} &= 1 + \tfrac{5}{6}E_4 \\ E_{tv} &= 1 + \tfrac{5}{6}E_4 + \tfrac{1}{6}E_{dv} \\ E_{ev} &= 1 + \tfrac{5}{6}E_4 + \tfrac{1}{6}E_{tv} \\ E_4 &= 1 + \tfrac{5}{6}E_4 + \tfrac{1}{6}E_{ev} \end{aligned}$$

Herhaalde substitutie (van boven naar beneden) geeft dan:

$$E_4 = 1+\tfrac{5}{6}E_4+\tfrac{1}{6}\cdot\left(1+\tfrac{5}{6}E_4+\tfrac{1}{6}\cdot\left(1+\tfrac{5}{6}E_4+\tfrac{1}{6}\cdot(1+\tfrac{5}{6}E_4)\right)\right)$$

Of:

$$E_4 = \left(1+\tfrac{1}{6}+(\tfrac{1}{6})^2+(\tfrac{1}{6})^3\right)+\tfrac{5}{6}E_4\cdot\left(1+\tfrac{1}{6}+(\tfrac{1}{6})^2+(\tfrac{1}{6})^3\right)$$

En dus:

$$E_4 = \left(1+\tfrac{1}{6}+(\tfrac{1}{6})^2+(\tfrac{1}{6})^3\right)\cdot(1+\tfrac{5}{6}E_4)$$

Hieruit laat Gallin (zonder meer) volgen dat voor de kansvariabele X_n = 'aantal keer werpen tot n maal achterelkaar een 6 valt' geldt:

$$E_n = E(X_n) = \left(1+\tfrac{1}{6}+\ldots+(\tfrac{1}{6})^{n-1}\right)\cdot(1+\tfrac{5}{6}E_n)$$

Verder uitwerken geeft dan:

$$\begin{aligned}E_n &= \frac{1-(\frac{1}{6})^n}{1-\frac{1}{6}}\cdot(1+\tfrac{5}{6}E_n) = \left(1-(\tfrac{1}{6})^n\right)\cdot(\tfrac{6}{5}+E_n)\\ &= \tfrac{6}{5}\cdot\left(1-(\tfrac{1}{6})^n\right)+E_n-(\tfrac{1}{6})^n\cdot E_n\end{aligned}$$

Zodat:

$$(\tfrac{1}{6})^n\cdot E_n = \tfrac{6}{5}\cdot\left(1-(\tfrac{1}{6})^n\right) = \tfrac{6}{6-1}\cdot\left(1-(\tfrac{1}{6})^n\right)$$

En na vermenigvuldiging met 6^n van het linker en rechter lid van deze betrekking is:

$$\begin{aligned}E_n &= 6\cdot\frac{6^n-1}{6-1} = 6\cdot(1+6+6^2+\ldots+6^{n-1})\\ &= 6+6^2+6^3+\ldots+6^n\end{aligned}$$

Waarmee – en nu wel erg eenvoudig – blijkt dat:

$E_1 = 6$, $E_2 = 42$, $E_3 = 258$, $E_4 = 1554$, …

Over Die Wurzel

Het tijdschrift *Die Wurzel, Zeitschrift für Mathematik*, verschijnt maandelijks (met af en toe een tweemaandelijks nummer), telt meestal zo'n 30 pagina's op A5-formaat en kost € 1,00 per aflevering (exclusief verzendkosten).[6] Het blad wordt uitgegeven door Wurzel, vereniging tot bevordering van de wiskunde op scholen en universiteiten, gevestigd op de Friedrich-Schiller-Universität te Jena, en is bedoeld voor leerlingen en leraren ('der gymnasialen Oberstufe') en voor studenten.
Het niveau van de artikelen in *Die Wurzel* ligt meestal boven dat wat 'onze' vwo-leerlingen aankunnen (zoals ook het artikel van Gallin).

```
// Dobbelen
serie:=0; num:=10000
totaal:=0 // totaal aantal worpen
nworp:=0 //  aantal per serie
max:=0; min:=num
//
WHILE serie<num DO
  serie:+1
  werpen
  IF nworp>max THEN max:=nworp
  IF nworp<min THEN min:=nworp
  totaal:+nworp
ENDWHILE
PRINT "E =";totaal/num // verwachting
PRINT "min =";min
PRINT "max =";max
//
PROC werpen
  nworp:=0
  REPEAT
    a#:=RND(1,6); nworp:+1
    IF a#=6 THEN
      b#:=RND(1,6); nworp:+1
    ENDIF
  UNTIL a#=6 AND b#=6
```

figuur 8 Simulatieprogramma in COMAL

Noten

[1] Dick Klingens (2003): *Een gemiste kans?* In: *Euclides* 78(3); pag. 114.

[2] Met een computerprogramma (***zie figuur 8***) uit de Pascal-familie (COMAL) voerde ik eerst een simulatie met 10000 series worpen uit. Dat programma – en zie daarin de PROCedure werpen – was aanleiding tot het opstellen van beide schema's; ze zijn ontstaan uit het stroomdiagram erbij. De uitvoer van een simulatie was:
| E = 41.8175
| min = 2
| max = 483
met 2 als kleinste aantal worpen in een serie (niet toevallig bij het aantal series in de simulatie), en 483 als grootste aantal.

[3] Peter Gallin (2009): *Erleichterung durch Markow-Prozesse*. In: *Die Wurzel* 43(6); pp. 130-137.
Gallin is verbonden aan het Institut für Gymnasial und Berufspädagogik van de Universität Zürich.

[4] Gallin meldt dat hij op basis van die formule met geschikte wiskundige software een simulatie tot en met $k = 500$ heeft uitgevoerd met als uitkomst 41,9976.

[5] In de formule:

$$E_3 = p^3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(k+3)\cdot V_k$$

is, volgens Gallin:

$$V_k = \sum_{i=\lfloor\frac{k+2}{3}\rfloor}^{k} T\left(i,\ (-k \bmod 3)+3\left(i-\lfloor\tfrac{k+2}{3}\rfloor\right)\right)a^{k-i}b^i$$

waarbij:

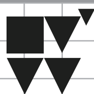
$$\begin{aligned}T(n,m) &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-m+j}\\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\frac{n!}{j!\cdot(n-m+j)!\cdot(m-2j)!}\end{aligned}$$

De T's zijn de bedoelde trinomiaalcoëfficiënten.

[6] Zie ook: *www.wurzel.org* (Wurzel Online).

Over de auteur

Dick Klingens was tot aan zijn pensionering (in 2010) verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel. Hij is eindredacteur van *Euclides*.
E-mailadres: *dklingens@pandd.nl*



Jaarvergadering/ Studiedag 2011

[Marianne Lambriex]

Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2011 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op **zaterdag 5 november 2011**.
Aanvang: 10:00 uur
Sluiting: 16:00 uur
Plaats: Ergens in het midden van het land.

Agenda

Huishoudelijk gedeelte

- Opening door de voorzitter mevr. drs. M. Kollenveld
- Jaarrede door de voorzitter
- Notulen van de jaarvergadering 2010 (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Jaarverslagen (zie een volgend nummer van *Euclides*)
- Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
- Bestuursverkiezing en -overdracht
- Rondvraag
- Sluiting jaarvergadering
- Vervolg met de studiedag

De eerste aankondiging van het themagedeelte van de studiedag kon u al lezen in *Euclides* 86(6). Henk van der Kooij gaf een toelichting op het thema van deze studiedag: 'Wiskunde werkt; reken maar'. Hieronder volgt een herhaling van deze aankondiging.

Themagedeelte van de studiedag

Wiskunde werkt; reken maar!

Het wiskundeonderwijs lijkt, meer dan andere vakken, onderhevig aan continue aanpassingen en veranderingen. Rekenen is een politiek speerpunt geworden, met landelijke rekentoetsen aan het eind van vmbo (2F) en havo/vwo (3F) in 2013/14, en als het aan de Onderwijsraad ligt, wordt er bij wiskunde, als kernvak, meer opbrengstgericht gewerkt liefst met tussentijdse toetsen. Daarnaast wordt de vernieuwing van de examenprogramma's voor havo/vwo door cTWO in lesmaterialen uitgewerkt en getest in pilotsscholen.
Het gekozen thema is breed; je kunt er veel in kwijt en dat is ook onze bedoeling.

Wiskunde werkt

Bij dit subthema valt te denken aan:

- Hoe krijg je doeners aan het denken? Veel vmbo-leerlingen werken liever met de handen en voelen niet zozeer de behoefte aan wiskundig denken. Kan het denken worden gestimuleerd vanuit het doen?
- Wiskunde wordt gebruikt in bijna alle beroepen. Wat voor wiskunde heeft een loodgieter nodig, of een geoloog? Wiskunde werkt, zeker! Maar hoe? Is dat de wiskunde die zij op school hebben geleerd, of ziet het er anders uit?
- Wiskunde die is ingebed in de beroepspraktijk, lijkt een goede uitdaging voor het onderwijs in vmbo en havo.
- Werkt wiskunde ook binnen andere schoolvakken en hoe dan wel?
- Wat is effectief en efficiënt wiskundeonderwijs?
- Wiskunde met gebruik van ICT-middelen. Hoe werkt dat in de lespraktijk?

Reken maar

Uiteraard zijn hier veel bijdragen mogelijk:

- Rekenbeleid op de school. Hoe doet u dat? Wiskunde lestijd, die toch al beperkt is, aan het rekenen besteden? Of toch maar liever in overleg met andere secties het rekenen spreiden over de vakken?
- Hoe wordt er gerekend bij de andere vakken? Procentrekenen komt bij veel vakken voor, maar ieder vak lijkt zijn eigen aanpak te hebben.
- Hoe krijg je voor leerlingen meer herkenbaarheid in de verschillende vakken? Afstemming en samenhang zijn belangrijk, maar lukt dat ook in de praktijk?

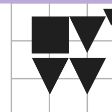
Vakvernieuwing

Uiteraard worden hier weer veel bijdragen vanuit cTWO verwacht, liefst met nieuws en ervaringen uit de pilotscholen. Wat wordt er vanaf 2015 nu zo anders en hoe moeten we de leerlingen in de onderbouw een verantwoorde keuze laten maken? En hoe zit het met de samenhang met de exacte vakken en economie?

Diversen

Uiteraard is bovenstaande opsomming niet uitputtend. Heeft u een idee voor een bijdrage, dan horen wij dat graag.
Wij zullen gericht mensen vragen om een presentatie te verzorgen, maar wij roepen u ook op om een bijdrage te leveren aan het slagen van de studiedag.
Heeft u een idee? Laat dat dan met een e-mailbericht weten aan Henk van der Kooij (e-mailadres: *h.vanderkooij@uu.nl*).
Uiteraard hoe eerder hoe beter, maar in ieder geval **vóór 1 juli 2011**.

Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 5 november, NVvW-dag.
In het volgende nummer van *Euclides* krijgt u nadere informatie over wat u kunt verwachten op die dag. De omschrijvingen van de workshops worden vanaf midden september op de NVvW-site gepresenteerd.
Voor meer praktische informatie over de organisatie kunt u zich wenden tot: Marianne Lambriex (e-mailadres: *m.lambriex@nvvw.nl*).



Van de bestuurstafel

[Johan Gademan]

PR en digitalisering

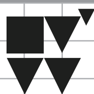
Het is een goede gewoonte dat nieuwe bestuursleden zich voorstellen in *Euclides*. Sinds november 2010 bekleed ik in het bestuur de portefeuille PR en digitalisering. Ik ben één van de twee opvolgers van Metha Kamminga (***zie foto 1 op pag. 317***). De afgelopen jaren heeft Metha zich erg ingezet voor de opzet, de bouw en het gebruik van onze website. Deze site (*www.nvvw.nl*) is een baken geworden, alle informatie over en van de NVvW is daar te vinden. De insteek voor mijn bestuurswerk zal de komende jaren anders zijn. Het aardige van bestuurslid zijn bij de NVvW en van dit bestuur is, dat je dit voor een groot deel zelf kunt invullen en bepalen. In deze 'Bestuurstafel' wil ik beschrijven welke ideeën ik heb voor het invullen van de portefeuille. Een aantal van die ideeën zijn al geëffectueerd.

Informatievoorziening

Natuurlijk moet onze site onderhouden worden, geactualiseerd blijven en waar mogelijk uitgebreid worden. Maar er zijn mijns inziens nu ook andere prioriteiten. Het belangrijkste aandachtspunt is de informatievoorziening aan de leden, aan u dus. Leden dienen snel en goed geïnformeerd te worden, want goed geïnformeerde leden zijn meer betrokken bij een vereniging. Ik ben van mening dat goed en snel geïnformeerde leden hun vereniging meer waarderen en eerder bereid zijn een handje uit te steken of (on)gevraagd hun mening te geven. Het is verheugend dat op een jaarvergadering veel leden aanwezig zijn, maar het is toch wel opvallend dat er heel weinig vragen of opmerkingen komen tijdens het huishoudelijk gedeelte. Wat mij betreft mag er wel meer discussie komen. Hoe worden leden nu geïnformeerd, heb ik me afgevraagd? Vooral via *Euclides* en website. De website wordt goed bezocht maar hierin zijn we afhankelijk van het initiatief van elk individueel lid om naar de website te gaan. *Euclides* wordt volgens ons goed gelezen, maar de duur tussen het schrijven van bijvoorbeeld deze rubriek en het verschijnen ervan is ongeveer zes weken. Ik schrijf dit artikel op 4 en 5 mei, en u leest het waarschijnlijk in de tweede helft van juni of misschien nog wel later. In deze tussenliggende periode is er veel gebeurd: we hebben de examens en de examenbesprekingen gehad, we hebben een enquête uitgezet over *Euclides* en een ledenbijeenkomst gehad, de lancering van Platform Wiskunde Nederland (PWN) is geweest en wie weet wat er nog meer is gebeurd. Ik kan er nú niets over schrijven. Voor snelle informatie aan de leden is *Euclides* niet optimaal. We laten, denk ik, als bestuur mogelijkheden onbenut om u te informeren. In dit kader hebben we ook het initiatief genomen tot een gesprek met de redactie van de *WiskundE-brief* om te kijken of we meer kunnen gaan samenwerken. Maar er is meer…

Sociale media

Als bestuur hebben we ons de vraag gesteld of we digitale sociale media meer moeten gaan inzetten. Te overwegen zijn een Twitter-account, een weblog en een LinkedIN-groep. Hyves of Facebook vonden we om diverse redenen niet wenselijk. Een weblog is een column op internet. LinkedIN is een sociaal netwerk van professionals. Je kunt collega's en oud-collega's raadplegen en snel hun mening vragen. LinkedIN biedt de mogelijkheid om groepen te maken, bijvoorbeeld de groep NVvW.
Het geeft ons de mogelijkheid snel uw mening te vragen en u kunt die aan ons en uw (oud-)collega's geven.
Zoals het er nu uitziet, zullen we geen weblog gaan starten, maar een LinkedIN-groep overwegen we wel serieus. Iets verder zijn we al met Twitter. Voor Twitter is een account aangevraagd en sinds een aantal maanden twitteren we mee. Twitter is een groeiend medium voor communicatie. Uitwisseling van kleine info's en korte standpunten. Door retweet-mogelijkheid verspreidt (kort) nieuws zich snel. Dat wil dus zeggen dat wij relevant nieuws, aankondigingen of meningen via Twitter aan het verspreiden zijn. Ons account is *@NVvWiskunde*. Hierbij verwijzen we vaak naar onze site, *www.nvvw.nl*, of gebruiken *#nvvw*. Wanneer u ook een Twitteraccount heeft, kunt u ons volgen. Het is ook een manier om wijzigingen en aanvullingen van onze site snel onder de aandacht van onze volgers te brengen. Heeft u geen Twitteraccount? Via *www.twitter.com* kunt u dat snel regelen. Vervolgens gaat u op zoek naar *@NVvWiskunde* en geeft aan dat u dit wilt gaan volgen. Onze Twitterberichten (tweets) zijn altijd voor alle leden (ook zonder Twitteraccount) te volgen via *www.twitter.com/NVvWiskunde*. Als bestuur hebben we een aantal basisafspraken over wat we wel en niet twitteren. Dus geen geneuzel, het moet echt betrekking hebben op de NVvW, op wiskunde of wiskundeonderwijs. We begrijpen dat niet alle leden Twitter gebruiken, maar



we bereiken wel steeds meer leden op de manier waaraan hij of zij behoefte heeft.

Digitale enquêtes

De laatste maanden hebben we een aantal keren heel gericht kleine digitale enquêtes uitgezet om uw mening te weten te komen en om informatie te verzamelen. We zijn heel blij als u dat invult; het geeft ons relevante informatie om trends te signaleren en om deze vervolgens weer breed te verspreiden. Zo zij er enquêtes geweest over aansluiting HBO, over Rekenbeleid en over *Euclides*. Deze enquêtes starten altijd op onze site en die kunt u vaak al invullen zonder dat u hoeft in te loggen. De resultaten komen ook weer op de site. Zodra deze bekend zijn en op de site staan, kondigen we dit aan via de *wiskundE-brief* en natuurlijk Twitter. We hopen dat u het nut van deze enquêtes en de opbrengst ervan deelt. Het ondersteunt ons cijfermatig en geeft vaak helder weer wat er leeft in het wiskundeonderwijs.

Zeker wat het rekenbeleid op scholen is veel te zeggen. Automatisch worden vaak wiskundedocenten op de scholen met het rekenbeleid opgezadeld. Maar rekenen is veel breder dan wiskunde. En wiskunde is veel meer dan rekenen. Er wordt in veel meer vakken gerekend dan alleen in wiskunde en wiskundedocenten hebben vaak al hun handen vol aan het wiskundeprogramma.

Meer aandacht voor rekenen gaat ten koste van de ontwikkeling van wiskundige begrippen. Wilt u de verschillen en overlappingen zien? Vergelijk de volgende documenten. Nog lang niet alle wiskundedocenten kennen ze. Ik vermeld ze nog maar even voor de volledigheid.

- De concretiseringen van het referentiekader rekenen staan op de site van de SLO: *www.taalenrekenen.nl/ref_niveaus_rekenen/uitwerkingen/*
- De tussendoelen onderbouw havo-vwo staan op de site van cTWO: *www.fi.uu.nl/ctwo/publicaties/*

Euclides

Ons vakblad sluit met dit nummer jaargang 86 af. Over *Euclides* hebben we uw mening gevraagd. Is *Euclides* uw lijfblad of vindt u dat er wel wat aan de inhoud verbeterd kan worden, of vindt u de papieren vorm inmiddels hopeloos ouderwets en leest u het liever op uw pc of ipad. Over onder andere deze twee vragen peilden we uw mening. Allereerst via een lezersonderzoek op de site van de NVvW. We vroegen u vriendelijk deze digitale enquête in te vullen. We willen graag weten wat u van ons blad vindt en hoe we het verder kunnen verbeteren. Via *www.nvvw.nl* kon u het lezersonderzoek invullen.

De tweede manier om uw mening te geven was via een ledenbijeenkomst op 17 juni j.l. Op deze middag wisselden we met onze leden van gedachten over *Euclides* en met name over de toekomst van ons vakblad in het digitale tijdperk. Hoe ziet *Euclides* er in de toekomst uit? Blijft het een papieren tijdschrift? Komen er daarnaast digitale versies of wordt het uitsluitend digitaal? Willen we ons vakblad ook doorzoekbaar maken? Welke nieuwe mogelijkheden en nieuwe wensen doen zich voor en hoe kijken onze lezers daar tegenaan? Kortom: hoe gaat *Euclides* er de komende jaren uitzien?

Het doel van deze meningspeiling is tot een inventarisatie van wensen en ideeën te komen en op basis daarvan een voorstel te formuleren. Natuurlijk moet er gekeken gaan worden naar wat het gevolg is voor de kosten en de werkwijze. En ook zullen we lopende afspraken en contracten respecteren.

Heeft u dit alles gemist en wilt u ons toch nog iets melden over *Euclides*? Stuur dan een e-mailbericht naar de secretaris van de NVvW (*secretaris@nvvw.nl*).

Een belangrijk deel van de contributie van leden wordt besteed aan *Euclides*. Het drukken en verspreiden is een grote kostenpost. Digitaal verspreiden is goedkoper en gaat sneller. Maar wat wilt u?

Het maken en samenstellen van ons verenigingsblad vraagt veel tijd en energie. De redactieleden zijn vrijwilligers en ontvangen soms een kleine vergoeding voor het vele werk wat ze in het blad stoppen. Het is niet altijd te combineren met een volledige werkweek. Redactieleden zijn ook, net als u, perfectionisten. Ze willen een mooi blad maken zonder fouten en met artikelen die interessant en relevant zijn. Gelukkig ontvangen we veel bijdragen. De hoofdredacteur, Klaske Blom, regelt en coördineert dit alles. Helaas stopt ze er mee. Deze *Euclides* is haar laatste als hoofdredacteur. Het NVvW-bestuur wil Klaske heel erg bedanken voor haar energie, haar tijd en haar ideeën.

PWN – Imago wiskunde

Op zaterdag 14 mei is de oprichting van Platform Wiskunde Nederland gevierd. PWN wordt financieel mogelijk gemaakt door het KWG en de NVvW in samenwerking met NWO Exacte Wetenschappen, en krijgt tevens ondersteuning van het CWI en de universiteiten. Ook de TWINS-raad van de KNAW heeft haar steun aan PWN toegezegd. Marian Kollenveld zit namens de NVvW in het bestuur van PWN. PWN kent diverse commissies waarin veel leden van onze vereniging, weer als vrijwilliger, PWN helpen vorm te geven. Zo is er ook een commissie Publiciteit waar ik namens NVvW geregeld aanschuif.

Een van de gespreksonderwerpen voor de commissie Publiciteit is het imago van wiskunde. De commissie Publiciteit wil bijdragen aan een betere beeldvorming van de wiskunde in Nederland, met name door meer samenhang te brengen in bestaande publicitaire activiteiten. De commissie richt zich op het structureren, coördineren en ondersteunen van publiciteit voor de wiskunde, op basis van een inventarisatie van reeds bestaande publicitaire activiteiten. Primaire doelgroepen zijn: scholieren, bedrijfsleven en het grote publiek. De commissie Publiciteit wil zichtbaar maken dat wiskunde 'overal is' en 'ertoe doet'. Daartoe zal de commissie inspelen op ontwikkelingen in de samenleving en laten zien wat de rol van de wiskunde daarin is, en het publiek informeren over nieuwe wiskundige onderzoekresultaten en toepas-

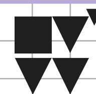




foto 1 Metha Kamminga met haar twee opvolgers: Johan Gademan (rechts) en Christiaan Boudri

singen. PWN kunt u ook volgen op Twitter via *@platformwisk* en via de PWN-website (*www.platformwiskunde.nl*).

Open leermiddelenbank

De bovenstaande onderwerpen betroffen vooral de portefeuille PR met digitalisering als afgeleide. Omgekeerd is er ook een onderwerp met een hoog gehalte aan digitalisering zoals de Open leermiddelenbank. Zoals onze voorzitter in haar rede op de laatste jaarvergadering al vertelde, participeert de NVvW in de pilot 'open lesmateriaal wiskunde'. Open wiskundelesmateriaal wordt talrijker en diverser, we kunnen daar niet meer om heen. Via VO-Content of Wikiwijs wordt docenten straks open lesmateriaal op een presenteerbordje aangeboden, al dan niet in een leerlijn. Een taak van de NVvW als service aan haar leden zou kunnen zijn, het kaf van het koren te scheiden. Niet gericht op didactiek maar op inhoud. Welke content is 'wiskundig' juist en welke niet? Welke past in het examenprogramma en welke niet? Welke houdt zich aan de nomenclatuur en welke niet? Dit moeten we nog gaan organiseren, eventueel met een sterrensyteem. Belangrijk is dat we leden laten meedenken en dat ze commentaar kunnen geven op de inhoud.
Het gaat dus vooral om kwaliteitsbewaking van open lesmateriaal om zo leden te helpen een verantwoordde keus te maken in dit groeiende aanbod. Deze kwaliteitsbewaking kan ook uitbesteed worden en vervolgens gemonitord worden door de NVvW. Stempel/keurmerk van de NVvW moet waarde gaan krijgen. Men moet het willen hebben als aanbieder en voor de docent is het keurmerk een signaal dat het wiskundig verantwoord is om te gebruiken.
Mogelijk onderdeel hiervan is Wisbase. Wisbase wordt mede onderhouden met geld van NVvW en is nu alleen lokaal toegankelijk. Het zou in de toekomst als dienst beschikbaar gesteld moeten worden aan alle leden, bijvoorbeeld via de website van de NVvW. Hierover gaan we in overleg met Wisbase. Het doel is kwalitatief verantwoorde toetsen uit te wisselen ten einde kwaliteit onderwijs te waarborgen en docent te ondersteunen. Belangrijk is wel het motto; het gaat om: vóór en dóór wiskundedocenten, de NVvW faciliteert en organiseert.

Reactie

Met deze bijdrage heb ik inzicht en overzicht willen geven van de portefeuille PR en digitalisering. Mocht u vragen of opmerkingen hebben, mail me gerust (e-mailadres: *j.gademan@nvvw.nl*).
U begrijpt dat dit slechts een deel van de aandachtsgebieden van het bestuur is; de andere leden vullen hun functie weer op een andere manier in. U zult hierover vast in een ander nummer van *Euclides* meer lezen.

RECREATIE

PUZZEL 86-7

Verdelingen in vierkanten

[Frits Göbel]

Deze aflevering van Recreatie is mijn laatste. De redactie heeft mij gevraagd om plaats te maken voor iemand die eenvoudigere opgaven kan leveren, zodat er meer mensen plezier aan kunnen beleven.
De nieuwe opgaven, met veel ruimte voor eigen onderzoek! Het gaat over het betegelen van een rechthoek van n bij $n + 1$ (n geheel) met zo weinig mogelijk vierkanten. Laat $a(n)$ het minimum zijn. Exacte waarden van $a(n)$ zijn mij alleen bekend voor kleine n.
We streven dus naar scherpe bovengrenzen. De 'greedy' algoritme begint met een vierkant van n bij n. Het resultaat is dan $a(n) \leq n + 1$. Dit kan beter!
Neem maar 20 × 21. Verdeel dit in twee stroken: 5 × 20 en 16 × 20. De eerste strook kan in 4 vierkanten van 5 × 5 worden verdeeld. De tweede is niet moeilijker dan 4 × 5 en hier nemen we genoegen met de verdeling in 5 vierkanten. Onze eerste bovengrens kan zo worden verbeterd van 21 tot 4 + 5 = 9.

Opgave 1
Generaliseer deze aanpak naar $a(k(k + 1)) \leq 2k + 1$ en concludeer dat er een deelrij van de natuurlijke getallen bestaat met $a(n) = O(\sqrt{n})$.

Voor degenen die niet vertrouwd zijn met het O-symbool, geef ik hier een definitie. $f(n) = O(g(n))$ betekent: er is een constante c zó dat $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$ voor n voldoende groot.

Die bovengrens van $a(n)$ ziet er niet slecht uit, maar het kan een stuk beter.

Opgave 2
Bepaal een deelrij van de natuurlijke getallen met $a(n) = O(\ln(n))$.

Aanwijzing. Ook deze bovengrens is te vinden uit verdelingen in 2 stroken waarvan er één met gelijke vierkanten wordt betegeld.

Wie deze twee opgaven te pittig vindt, kan toch nog aan de slag.

Opgave 3
Bepaal zo scherp mogelijke bovengrenzen voor $a(n)$ met $n = 5, \ldots$, ad lib.

Een opmerkelijk verschijnsel doet zich voor bij een omgekeerd probleem. Een tegel van k bij $k + 1$ noemen we even een 'pronik' (naar de pronikgetallen; dat zijn getallen die het product zijn van twee opvolgende natuurlijke getallen). Betegel nu een vierkant van n bij n met zo weinig mogelijk proniks. Het antwoord is verbazend eenvoudig: voor oneven n gaat het niet; voor even n kan het met 4 proniks (als $n = 2$ zelfs met 2).

Dankwoord
Na de opheffing van de rubriek Recreatie heb ik van veel inzenders waarderende woorden mogen ontvangen voor de diverse opgaven die zij in de afgelopen jaren kregen voorgeschoteld.
Daar ben ik erg blij mee. Ik heb er altijd met veel plezier aan gewerkt.
Het is heel prettig dat Lieke de Rooij en Wobien Doyer zich bereid hebben verklaard om het werk van de resterende afleveringen op zich te nemen.
Ook wil ik op deze plaats de redactie van *Euclides* danken voor de geboden gelegenheid om mijn hersenspinsels te ventileren.

Van de redactie
Oplossingen kunnen niet meer ingezonden worden naar Frits Göbel.
De meeste, bij de redactie, bekende puzzelaars hebben hierover bericht ontvangen. Leest u voor verdere informatie het redactionele stuk 'Van Recreatierubriek naar Meet je rekenkracht!'.

U kunt uw oplossing mailen naar: *redactie-euclides@nvvw.nl* waarna deze wordt doorgestuurd naar Lieke de Rooij en Wobien Doyer, die de correctie voor hun rekening nemen.
Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing. De deadline is 16 augustus. Veel plezier!

Van Recreatierubriek naar Meet je rekenkracht!

[Klaske Blom]

Bedankt Frits!
Voor het eerst in vele jaren treft u hier niet de verwachte oplossing van de puzzel uit nummer 5 – De afstand tussen rechthoek en vierkant – aan. De puzzel van Frits Göbel die u hiernaast ziet – Verdelingen in vierkanten – is de laatste puzzel uit zijn koker. De redactie heeft besloten dat we met ingang van de volgende jaargang verder gaan met een nieuwe opzet van de puzzelrubriek, waarover hierna meer.

Frits Göbel heeft 9 jaar de Recreatiepagina's verzorgd en we zijn hem daarvoor zeer erkentelijk. Hij leverde met veel creativiteit en inzet elke keer weer een puzzel waar u uw tanden in kon zetten. De 'ladder' toonde dat er fanatiek gestreden werd om de hoogste plaats en uit de steeds terugkerende namen bleek dat een aantal inzenders genoot van deze strijd.
Wiskundig gezien vereisten de puzzels niet bijzonder diepe voorkennis, maar zonder een kleine studie van de benodigde wiskundige instrumenten, kon je ze niet oplossen. We realiseren ons als redactie dat we de huidige puzzelaars misschien teleurstellen door het beëindigen van deze rubriek. We hopen echter een nieuwe groep puzzelaars aan te spreken met een vernieuwde opzet van deze Recreatierubriek.
Vanwege gezondheidsredenen was Frits helaas genoodzaakt zijn werk voor *Euclides* eind april al neer te leggen en daardoor heeft hij de laatste inzendingen niet meer kunnen nakijken.
De, bij de redactie bekende, inzenders van deze rubriek zijn hier inmiddels over geïnformeerd. We prijzen ons gelukkig dat we Lieke de Rooij en Wobien Doyer bereid hebben gevonden om de laatste drie puzzels van Frits, uit de nummers 5, 6 en 7, na te kijken. U zult dan ook in de volgende nummers van *Euclides* nog de oplossingen van deze puzzels vinden, evenals uiteraard de winnaar van de zomerprijs en de laatste ladderprijs.

Welkom Rekenbeter!
Met ingang van jaargang 87 komt op deze plaats een rekencompetitie, speciaal voor lezers van *Euclides*: de redactie van *Rekenbeter.nl* start dan een competitie in rekenkracht.
U kunt zich vanaf vandaag aanmelden bij *Rekenbeter.nl* (*www.rekenbeter.nl*) als lezer van *Euclides* en u komt dan in een aparte groep terecht met een eigen klassement. Dagelijks ontvangt u een mail met daarin een link naar de dagelijkse rekenopgaven. De prestaties van de groep worden online bijgehouden op basis van het percentage goed beantwoorde opgaven in combinatie met de snelheid waarin ze zijn opgelost.
In elk nummer van *Euclides* verschijnt op de Recreatiepagina voortaan een Doordenker. Uw oplossing van deze Doordenker kunt u (voor de genoemde deadline) kwijt in een forum. De puzzelredacteuren van *Rekenbeter.nl* zullen in het daaropvolgende nummer van *Euclides* een bloemlezing publiceren van de ingestuurde oplossingen van deze Doordenker. Uiteraard loven we nog steeds 4 keer per jaar een prijs uit voor de beste oplossingen.

We hopen dat u in grote getale mee zult doen en uw rekenkracht zult meten met die van anderen.
Goede competitie gewenst!

SERVICEPAGINA

Publicaties van de Nederlande Vereniging van Wiskundeleraren



Zebraboekjes

1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto's, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens
18. Zeepvliezen
19. Nullen en Enen
20. Babylonische Wiskunde
21. Geschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde
22. Spelen en Delen
23. Experimenteren met kansen
24. Gravitatie
25. Blik op Oneindig
26. Een Koele Blik op Waarheid
27. Kunst en Wiskunde
28. Voorspellen met Modellen
29. Getallenbrouwerij
30. Passen en Meten met Cirkels
31. Meester Ludolphs Koordenvierhoek
32. Experimenteren met rijen
33. Ontwikkelen met Kettingbreuken

Zie verder ook *www.nvvw.nl/page.php?id=7451* en/of *www.epsilon-uitgaven.nl*

Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo

Dit rapport en oude nummers van *Euclides* (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

Voor overige internet-adressen zie
www.wiskundepersdienst.nl/agenda.php

Kalender

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de eindredacteur, het liefst via e-mail (*dklingens@gmail.com*).
Hieronder staan de verschijningsdata van *Euclides* in de komende jaargang. Achter de verschijningsdatum is de deadline vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de *eind*versies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor echter ook *www.nvvw.nl/euclricht.html*

jaargang 87

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
1	13 september 2011	19 jul 2011
2	25 oktober 2011	30 aug 2011
3	20 december 2011	25 okt 2011
4	7 februari 2012	6 dec 2011
5	27 maart 2012	31 jan 2012
6	15 mei 2012	20 maa 2012
7	26 juni 2012	1 mei 2012

wo. 13 t/m zo. 24 juli, Amsterdam
52e Internationale Wiskunde Olympiade (IMO 2011)
Organisatie Stichting IMO2011

ma. 1 t/m vr. 19 augustus, Lunteren
Wiskunde Zomerkampen
Organisatie Vierkant voor Wiskunde
Zie ook pag. 298 in dit nummer.

vrijdag 23 september, Nijmegen
Wiskundetoernooi 2011
Organisatie Radboud Universiteit
Zie ook pag. 252 in *Euclides* 86(6).

zaterdag 5 november
Jaarvergadering/Studiedag NVvW
Organisatie NVvW
Zie ook pag. 314 in dit nummer.

maandag 10 oktober, Utrecht
Conferentie: Lessen in motivatie/motivatie in lessen
Organisatie APS

vrijdag 25 november, Leeuwarden
Studiedag: Zekerheden in waarnemingen
Organisatie Obe Postma Selskip

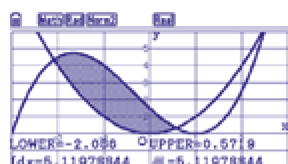
CASIO *fx*-CG20: Kleurrijke wiskunde!

De *fx*-CG20 van CASIO is de eerste van een nieuwe generatie grafische rekenmachines, die dankzij zijn hogeresolutie LCD-kleurenscherm en uitgebreide functionaliteit de ideale studiegenoot is voor iedere scholier of wiskundestudent.

De *fx*-CG20 van CASIO biedt als eerste ter wereld de functie 'Picture Plot' waarmee de gebruiker grafieken en curven over andere beelden heen kan plotten, zoals een parabool over de waterstralen van een fontein. Studenten kunnen experimenteren met het creëren van hun eigen grafieken over foto's heen. Vervolgens leren ze van de functies van deze zelfgemaakte grafieken. Grafieken die in kleur bovendien een stuk gemakkelijker te overzien zijn. Het hogeresolutie LCD-kleurenscherm toont alle beeldmateriaal in 65.000 kleuren en biedt daarmee dezelfde weergave als in een studieboek. De *fx*-CG20 introduceert een geheel nieuwe en meer intuïtieve manier van wiskunde leren.

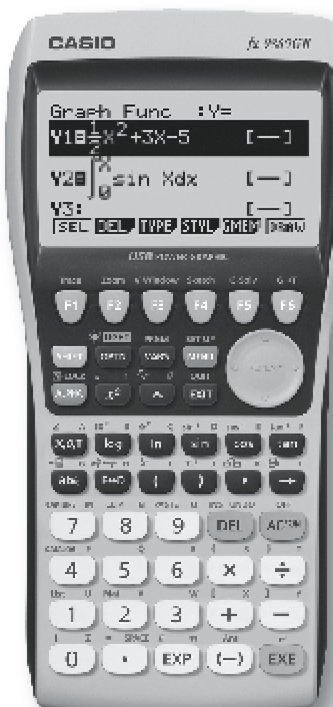
Bekijk het in kleur op www.casio-educatie.nl





CASIO: betrouwbaar als de uitkomst zelf!

Op de Natural Textbook Display worden o.a. breuken en wortels weergegeven als in het leerboek. De *fx*-82ES Plus is ook geschikt voor het gebruik van tabellen.



CASIO *fx*-9860GII

Rekengemak:
de grafische rekenmachine *fx*-9860GII met groot contrastrijk display met natuurlijke invoer en uitvoer, achtergrondverlichting en 1,5 MB Flash-ROM-geheugen.



CASIO *fx*-82ES PLUS

Geniale oplossing:
de technisch-wetenschappelijke zakrekenmachine *fx*-82ES Plus met natuurlijke invoer- en uitvoerfunctie, en met puntmatrixscherm zorgt voor meer begrip tijdens het onderwijs.

3 jaar garantie

Bestel uw speciaal geprijsde docentenexemplaar van de nieuwe CASIO *fx*-CG20 via e-mail educatie@casio.nl

CASIO. dé nummer 1 in rekenmachines voor het onderwijs.

Casio Benelux B.V. - Tel: 020 545 10 70 - educatie@casio.nl - www.casio-educatie.nl